# 非線形消散型シュレディンガー方程式の漸近挙動について

成亥隆恭（大阪大学 理学研究科）

## 1　導入

本講演では次のべき乗型非線形項を持つ消散型シュレディンガー方程式について考察する.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + iau + \mu |u|^{p-1}u = 0, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{NLDS}$$

ここで $d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $\mu = \pm 1$, $1 < p < 1 + 4/(d-2)$ とする．但し, $d = 1, 2$ の時は $1 + 4/(d-2)$ は $\infty$ と見做す．質量とエネルギーを

$$\begin{aligned} M(u(t)) &:= \|u(t)\|_{L^2}^2 \\ E(u(t)) &:= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \mu \frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

と定めた時, これらは

$$M(u(t)) = e^{-2at}M(u_0), \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -aK(u(t)), \tag{1.2}$$

をみたすことがわかる．但し, $K(\varphi) := \|\nabla\varphi\|_{L^2}^2 - \mu\|\varphi\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ である．質量 $M(u(t))$ は指数減衰しているので, 方程式 (NLDS) の解は減衰することが期待される．そのため, 消散項のない (つまり $a = 0$ の) 場合によく研究されている非線形散乱理論はそのままでは意味をなさない．つまり, 非線形の解が線形の解に漸近することを表す

$$\|u(t) - e^{-at}e^{it\Delta}\varphi\|_{H^1} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

（但し, $v = e^{-at}e^{it\Delta}\varphi$ は線形方程式 $i\partial_t v + \Delta v + iav = 0$, $v(0) = \varphi$ の解を表す．）という極限の式は, $e^{-at}e^{it\Delta}\varphi$ が指数減衰し, $u(t)$ の減衰も期待されるため, 三角不等式からほぼ自明に成立する．そこで, 本研究では時間に関して増大する $h(t)$ を用いて

$$h(t)e^{at}\|u(t) - e^{-at}e^{it\Delta}\varphi\|_{H^1} = h(t)\|e^{at}u(t) - e^{it\Delta}\varphi\|_{H^1} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

が成立することを示す.

## 2 主結果

**定義 2.1** ([1])**.** $h(t) : [0, \infty) \to [1, \infty)$ を十分大きな $t > 0$ において非減少な関数とする．大域解 $u$ が減衰オーダー $h^{-1}(= 1/h)$ で指数的に散乱するとは, 或る $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が存在して,

$$\lim_{t\to\infty} h(t)e^{at} \left\|u(t) - e^{-at}e^{it\Delta}\varphi\right\|_{H^1} = 0,$$

が成り立つことをいう．特に $h \equiv 1$ の時は, 単に指数的に散乱するという.

**定理 2.1** ([1])**.** $\mu = \pm 1$, $1 < p < 1 + 4/(d-2)$ とする．大域解 $u$ が ($h \equiv 1$ で) 指数的に散乱するならば, $u$ は以下の減衰オーダー $h^{-1}$ で指数的に散乱する.

$$h^{-1} = \frac{1}{h} = \begin{cases} (1+t)^{(p-1)\left(\frac{1}{\alpha}+\varepsilon\right)} e^{-(p-1)at} & (p < 1 + \frac{4}{d}), \\ e^{-(p-1)at} & (p \geq 1 + \frac{4}{d}), \end{cases}$$

ここで $\alpha$ は $p$ と $d$ から定まる正定数で, $\varepsilon > 0$ は任意の正数.

方程式 (NLDS) は $p$ によっては爆発解が存在することが知られている [3, 2]. そこで, 本講演では解が大域的に存在し指数的に散乱するための十分条件についても紹介する.

# References


[1] T. Inui, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 2, 763–773.

[2] M. Ohta and G. Todorova, Discrete Contin. Dyn. Syst. **23** (2009), no. 4, 1313–1325.

[3] M. Tsutsumi, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), no. 2, 357–366.