全空間領域上の二重拡散対流方程式に対する時間周期問題の可解性について[1]

内田　俊　(大分大学理工学部 共創理工学科数理科学コース)

1. 序

多孔質媒質中の二重拡散対流現象を記述する方程式系に対する以下の時間周期問題を考察する：

$$
\text{(P)}\quad
\begin{cases}
\partial_t \boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{u} - \nabla p + \boldsymbol{g}\theta + \boldsymbol{h}\sigma + \boldsymbol{f}_1, & \\
\partial_t \theta + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta = \Delta\theta + f_2, & \\
\partial_t \sigma + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma = \Delta\sigma + \rho\Delta\theta + f_3, & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & \\
\boldsymbol{u}(\cdot,0) = \boldsymbol{u}(\cdot,T),\ \ \theta(\cdot,0) = \theta(\cdot,T),\ \ \sigma(\cdot,0) = \sigma(\cdot,T), & \text{in } \mathbb{R}^d.
\end{cases}
$$

未知関数は流速 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = (u^1(x,t),\ldots,u^d(x,t))$，温度 $\theta = \theta(x,t)$，溶質濃度 $\sigma = \sigma(x,t)$，圧力 $p = p(x,t)$ である．既知のデータとして，$\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ は定ベクトル，ν, a, ρ は正定数，$\boldsymbol{f}_1 = (f_1^1(x,t),\ldots,f_1^d(x,t))$, $f_2 = f_2(x,t)$, $f_3 = f_3(x,t)$ は外力を表す．以降 “Large data” とは，これらのデータ及び時間周期 T に大きさの制限を課さない事を意味し，逆に “Small data” とは既知のデータ，特に外力項のノルムの小ささを仮定する事を意味する．

この方程式系は，Boussinesq 系 (熱対流方程式系) 内の Navier-Stokes 方程式を Stokes 方程式に置き換えたものと類似している．その為，熱・溶質に関する移流項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta, \boldsymbol{u}\cdot\nabla\sigma$ を非線型項として持つものの，Navier-Stokes 方程式や Boussinesq 系と比較して取扱いは容易であり，実際次元 4 以下の非有界領域上の初期値境界値問題が Large data に対して一意大域的な強解を持つ事が既に示されている ([8])．これを踏まえ本研究では，非有界領域上の時間周期問題 (P) の Large data に対する可解性を示す事を目的とする．

一般に移流項のような非単調摂動項を持つ放物型方程式に対する時間周期問題を考える場合，時区間 $[0,T]$ を絞る事が出来ない為に “領域の非有界性” と “Large data” が相反する条件となってしまう．例えば非有界領域上の Navier-Stokes 方程式に対する時間周期問題の可解性は [2][4][5] で示されており，同様の手法により Boussinesq 系についても [10] において時間周期解の存在が示されている．しかしこれらの手法では逐次近似の収束の為に Small data の仮定は不可欠である．一方 Large data に対する時間周期解の構成は，劣微分作用素を主要項とする抽象発展方程式の枠組みにおいて [1][6][7][11] で考察されている．特に非単調摂動項付きの方程式に関する [7] の結果を適用する事で Boussinesq 系の Large data に対する時間周期解の存在が [3] において示されている．しかしこれらの抽象論では，強圧性やある種のコンパクト性に関する仮定の下で議論がなされており，非有界領域上の問題への応用は難しい．

本講演では有界領域における時間周期解の領域拡大に際する収束性を議論する事により，“領域の非有界性” と “Large data” の条件を両立させた上での時間周期解の構成法を紹介する．

---
[1] 大谷光春教授（早稲田大学）との共同研究 [9] に基づく．

2. 記法，主結果

非圧縮性流体の解析でよく用いられる関数空間を以下で表す：

$$H_q(\Omega) := \overline{\{\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^d) \in C_0^\infty(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0\}}^{L^q(\Omega)},$$
$$V_q(\Omega) := \overline{\{\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^d) \in C_0^\infty(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0\}}^{W^{1,q}(\Omega)}$$
$$G_q(\Omega) := \{\boldsymbol{w} \in L^q(\Omega);\ \exists p \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ \text{ s.t. } \boldsymbol{w} = \nabla p\}.$$

本講演に現れる空間領域Ωは全空間$\mathbb{R}^d$または十分滑らかな境界を持つ有界領域であるため，$q \in (1,\infty)$についてHelmholtz分解$L^q(\Omega) = H_q(\Omega) \oplus G_q(\Omega)$が可能である．Stokes作用素は$q = 2$の場合に対してのみ定義をする．即ち$P_\Omega$は$L^2(\Omega)$から$H_2(\Omega)$への直交射影とし，$A_\Omega := -P_\Omega\Delta$とする．但し定義域は$D(A_\Omega) = W^{2,2}(\Omega) \cap V_2(\Omega)$. 特に$\Omega = \mathbb{R}^N$の時，$\boldsymbol{v} \in D(A_{\mathbb{R}^N})$ならば$-\Delta\boldsymbol{v} \in H_2(\mathbb{R}^N)$，即ち$A_{\mathbb{R}^N}\boldsymbol{v} = -\Delta\boldsymbol{v}$である事を想起する．

解の属する空間を

$$\mathbb{L}^q(\Omega) := L^q(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^q(\Omega), \quad X_q(\Omega) := H_q(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)$$

と表す（ベクトル値関数$\boldsymbol{u}$とスカラー値関数θ, σに対して同じ記法を用いる事に注意）．また時間周期関数の空間を

$$C_\pi([0,T]; X) := \{U \in C_\pi([0,T]; X);\ \ U(0) = U(T)\}$$

とする．また Sobolev 臨界指数は$q^* := dq/(d-q) \quad (q \in (1,d))$, Hölder 共役指数は$q' = q/(q-1) \quad (q \in (1,\infty))$により表す．

Definition 2.1. （解の定義）$d \geq 3$とする．この時$U = (\boldsymbol{u}, \theta, \sigma)$が(P)の解であるとは以下を満たす事とする．

1. Uは次の正則性を満たす（$k, l = 1, 2, \ldots, d$）：

$$\begin{aligned} &U \in C_\pi([0,T]; X_{2^*}(\mathbb{R}^d)), && \partial_{x_k}U \in C_\pi([0,T]; \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)),\\ &\partial_{x_k}\partial_{x_l}U \in L^2(0,T; \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)), && \partial_t U \in L^2(0,T; X_2(\mathbb{R}^d)),\\ &\Delta\boldsymbol{u} \in L^2(0,T; H_2(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

2. Uは(P)の第２，３式を$L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d))$で満たす．

3. 任意の$\boldsymbol{\phi} \in L^2(0,T; H_2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T; H_{(2^*)'}(\mathbb{R}^d))$に対し

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}\theta - \boldsymbol{h}\sigma - \boldsymbol{f}_1)\cdot\phi\, dxdt = 0.$$

Remark 2.2. Definition 2.1 の 3 は$U = (\boldsymbol{u}, \theta, \sigma)$が (P) の第 1 式を$L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d)) + L^2(0,T; L^{2^*}(\mathbb{R}^d))$で満たす(強解である)事を意味する．但し$\boldsymbol{f}_1$に由来する$\nabla p_1 \in G_2(\mathbb{R}^d)$と$\boldsymbol{g}\theta, \boldsymbol{h}\sigma$に由来する$\nabla p_2 \in G_{2^*}(\mathbb{R}^d)$により，圧力項は$p = p_1 + p_2$となる．

以上の定義の下，我々の主結果は以下のように記述される．

Theorem 2.3. （主結果）空間次元を$d = 3, 4$とする．また外力項は

$$\boldsymbol{f}_1 \in W^{1,2}(0,T; L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \boldsymbol{f}_1(\cdot, 0) = \boldsymbol{f}_1(\cdot, T),$$
$$f_2, f_3 \in L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T; L^{(2^*)'}(\mathbb{R}^d))$$

を満たすと仮定する．この時(P)は解を少なくとも１つ持つ．

参考文献

[1] P. Bénilan; H. Brézis, Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22(2) (1972), 311–329.

[2] G. P. Galdi; M. Kyed, Time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations, in Y. Giga and A. Novotny (Eds.), *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*, Springer, 2016, 1–70.

[3] H. Inoue; M. Ôtani, Periodic problems for heat convection equations in noncylindrical domains, Funkcial. Ekvac. 40(1) (1997), 19–39.

[4] H. Kozono; M. Nakao, Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains, Tohoku Math. J. 48 (1996), 33–50.

[5] P. Maremonti, Existence and stability of time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations in the whole space, Nonlinearity 4 (1991), 503–529.

[6] T. Nagai, Periodic solutions for certain time-dependent parabolic variational inequalities, Hiroshima Math. J. 5 (1975), 537–549.

[7] M. Ôtani, Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Periodic problems, J. Differential Equations 54 (1984), 248–273.

[8] M. Ôtani; S. Uchida, Global solvability for double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equation in general domains, Osaka J. Math. 53(3) (2016), 855–872.

[9] M. Ôtani; S. Uchida, Existence of time periodic solution to some double-diffusive convection system in the whole space domain, J. Math. Fluid Mech. 20(3) (2018), 1035-1058.

[10] E. J. Villamizar-Roa; M. A. Rodríguez-Bellido; M. A. Rojas-Medar, Periodic solution in unbounded domains for the Boussinesq system, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 26(5) (2010), 837–862.

[11] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodically moving boundaries, Nagoya Math. J. 70 (1978), 111–123.