On the linear response of the two-dimensional Gel'fand problem [1] [2]

大塚浩史[3]
金沢大学理工研究域数物科学系

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ は有界領域、$\partial\Omega$ は滑らか、$\lambda > 0$ は非負のパラメータとする。Gel'fand 問題とは、次の半線形固有値問題のことをいう：

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{G$_{\rm eq.}$}$$

これに対し、$p \in \Omega$ を固定し、δ_p を点 p に台をもつ Dirac 測度とするとき、パラメータ c に比例した次のような撃力（インパルス）による摂動を加えた問題を考察する:

$$-\Delta u_c = \lambda e^{u_c} + c\delta_p \quad \text{in } \Omega, \qquad u_c = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{G$_c$}$$

物理学における線形応答理論（例えば [5] など参）では、

$$R(x,p) := \left.\frac{\partial u_c}{\partial c}\right|_{c=0}$$

は（δu と書かれることも多い）、摂動 δ_p に関する線形応答（特にインパルス δ_p に対してインパルス応答）と呼ばれている。形式的には、$R(x,p)$ は、

$$-\Delta R = \lambda e^u R + \delta_p \quad \text{in } \Omega, \qquad R(\cdot, 0) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

を満たす。

このような線形応答 R を考察する物理学的背景には、純電子（非中性）プラズマ（[3] など参）の閉じ込め実験において観測される，電子が密集した場所の周りに円環状の真空領域が現れるという現象（例えば [11] など参）がある。この現象を理解するために、講演者らは二つの電子（の旋回中心）に対する相関関数の解析を進めているが、これは上記インパルス応答 R で記述されると考えている。

講演では、この線形応答 R に関する講演者の最近の研究と、簡単に物理学的背景について紹介したい。本研究は、八柳祐一氏（静岡大学）と羽鳥尹承氏（核融合研）との共同研究に基づく。

以下、導入として $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbf{R}^2\,;\, |x| < 1\}$、$p = 0$ の場合に得られる事実を紹介する。このとき (G$_c$) は次のように表される:

$$-\Delta u_c = \lambda e^{u_c} + c\delta_0 \quad \text{in } B_1(0), \quad u_c = 0 \quad \text{on } \partial B_1(0).$$

特に、$-\Delta \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|} = \delta_0$ であることから、 $w_c := u_c - \frac{c}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}$ は

$$-\Delta w_c = \lambda |x|^{-\frac{c}{2\pi}} e^{w_c} \quad \text{in } B_1(0), \quad w_c = 0 \quad \text{on } \partial B_1(0). \tag{1}$$

を満たす。これに関連して、Prajapat-Tarantello[10] の結果（の一部）として次が知られている：

[1] "第 147 回熊本大学応用解析セミナー" 於熊本大学大学院 (2019 年 7 月 20 日).
[2] 本研究は、科研費 (A)26247013、(C)15K04951 の支援を受けています。
[3] Hiroshi Ohtsuka, e-mail:ohtsuka@se.kanazawa-u.ac.jp

既存の結果 1 (Prajajapat-Tarantello[10])**.** $n>0$ をパラメータとする方程式

$$-\Delta w = 8\pi n|x|^{2(n-1)}e^{w} \quad \text{in } \mathbf{R}^2, \quad \int_{\mathbf{R}^2}|x|^{2(n-1)}e^{w} = 1$$

の解 w は、$0<|n-1|\ll 1$ のとき、次の形のものに限られる：

$$w(x) = w_*(\varepsilon x) + 2n\log\varepsilon$$

但し、$\varepsilon>0$ であり、

$$w_*(x) = \log\frac{1}{(1+|x|^{2n})^2} + \log\frac{n}{\pi}.$$

この事実を用いることで、(1) の解を得ることができる。実際、

$$2(n-1) = -\frac{c}{2\pi}(\Leftrightarrow n = 1-\frac{c}{4\pi})$$

と置き、$\varepsilon>0$ に対して

$$w_c(x) = w(x) - w(1) = w_*(\varepsilon x) - w_*(\varepsilon),$$

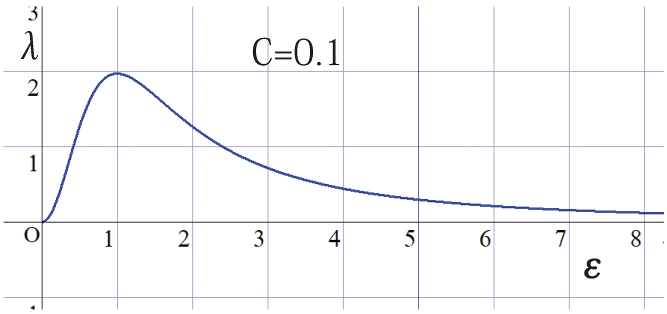
とおく。このとき、

$$8\pi n|x|^{2(n-1)}e^{w} = 8\pi n|x|^{2(n-1)}e^{w(1)}e^{w_c(x)}$$

が成り立つので、$\lambda>0$ に対し

$$8\pi n e^{w(1)}\left(= 8\pi n e^{\log\frac{1}{(1+\varepsilon^{2n})^n}+\log\frac{n}{\pi}+2n\log\varepsilon}\right) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{8n^2\varepsilon^{2n}}{(1+\varepsilon^{2n})^n}$$

を満たすような $\varepsilon>0$ を選べばよい。この関係をグラフに表すと次のようなものが得られる：



これより、ε が大小二つ選ぶことができることが容易に分かる。

以上により、具体的に次を得る：

命題 2.

$$R(x,0) = \left.\frac{\partial u_c}{\partial c}\right|_{c=0} = \frac{\partial}{\partial c}\left\{w_c + \frac{c}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}\right\}\Bigg|_{c=0} = \left.\frac{\partial}{\partial c}w_c\right|_{c=0} + \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-|\varepsilon x|^2}{1+|\varepsilon x|^2}\log\frac{1}{|x|} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\cdot\frac{1-|\varepsilon x|^2}{1+|\varepsilon x|^2} - 1\right)$$

講演では、大小二つの ε に対する R の違い（それぞれ、負と正に応答することが分かる）から、考察を進めたい。

参考文献

[1] Caglioti, E., Lions, P.L., Marchioro, C., and Pulvirenti, M., A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description, Comm. Math. Phys., 143 (1992), pp. 501-525.

[2] Eyink, G. L. and Sreenivasan, K. R., Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence, Rev. Modern Phys. 78(2006), pp.87–135.

[3] Davidson, R. C., *“Physics of Nonneutral Plasmas” 2nd ed.*, Imperial College Press, London, 2001.

[4] Kiessling, M.K.H., Statistical mechanics of classical particles with logarithmic interactions, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), pp. 27-56.

[5] Le Bellac, M., Mortessagne, F., and Batrouni, G. G. , *“Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics”*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.（邦訳：鈴木増雄 ・豊田正 ・香取眞理 ・飯高敏晃 ・羽田野直道 訳「統計物理学ハンドブック」，2007 年，朝倉書店）

[6] Lions, P. -L., *“ On Euler Equations and Statistical Physics”*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1997.

[7] Marchioro, C. and Pulvirenti, M., *“Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids”*, Springer, New York, 1994.

[8] Messer, J. and Spohn, H., Statistical mechanics of the isothermal Lane - Emden equation, J. Statist. Phys. 29 (1982), pp. 561–578.

[9] Onsager, L., Statistical hydrodynamics, Nuovo Cimento Suppl. 6 (9) No.2 (1949), pp. 279–287.

[10] Prajapat, J. and Tarantello, G., On a class of elliptic problems in $\mathbf{R}^2$: symmetry and uniqueness results, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 131 (2001), pp. 967–985.

[11] Sanpei, A., Kiwamoto, Y., and Ito, K., Generation of Vorticity Hole Surrounding a Point Vortex in a Nonneutral Plasma, J. Phys. Soc. Jpn., 70 (2001), pp. 2813–2816.

[12] Suzuki, T., Global analysis for a two-dimensional elliptic eigenvalue problem with the exponential nonlinearity, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **9** (1992) 367–398.