Comparison methods for a Keller–Segel-type reaction-diffusion system

藤江 健太郎 (東北大学 数理科学連携研究センター)[*1]
Jie Jiang (Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Chinese Academy of Sciences)

次の初期値境界値問題を考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta(\gamma(v)u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t - \Delta v + v = u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は滑らかな境界を持つ有界領域とする. 初期値 (u_0, v_0) は次の条件を満たす:

$$(u_0, v_0) \in C(\overline{\Omega}) \times W^{1,\infty}(\Omega), \quad u_0 \geq 0,\, v_0 > 0 \quad \text{in } \overline{\Omega}, \quad u_0 \not\equiv 0. \tag{2}$$

函数 γ は次の条件を満たすものとする:

$$\gamma \in C^3(0, +\infty), \quad \gamma(s) > 0,\ \ \gamma'(s) \leq 0 \ \text{ on } (0, +\infty), \quad \lim_{s \to \infty} \gamma(s) = 0. \tag{3}$$

得られた結果

定理 1. 問題 (1) の正値古典解 (u, v) は一意に定まり, 時間大域的に存在する.

定理 2. 函数 γ が次を満たすとする: $\exists k > 0$; $\lim_{s\to\infty} s^k \gamma(s) = \infty$. このとき, 問題 (1) の時間大域解は時間に一様に有界: $\sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.

定理 3. $\gamma(v) = e^{-v}$ とする.

$$\Lambda_c = \begin{cases} 8\pi & \text{if } \Omega = B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < R\} \ \text{with } R > 0 \text{ and } (u_0, v_0) \text{ is radial in } x, \\ 4\pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. $\int_\Omega u_0\, dx < \Lambda_c$ のとき, 問題 (1) の時間大域解は時間に一様に有界.

定理 4. $\gamma(v) = e^{-v}$ とする. $\Omega = B_R(0)$, 初期値 (u_0, v_0) は球対称であるとする. 任意の $\lambda \in (8\pi, \infty) \backslash 4\pi\mathbb{N}$ に対して, 次を満たすような初期値 (u_0, v_0) を構成できる:

(1) $\int_\Omega u_0\, dx = \lambda$;

(2) 時間大域解は時刻無限大で爆発する, i.e., $\lim\limits_{t \nearrow +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$.

証明のアイデア

- $\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ の上からの評価をアプリオリに導く;
- 放物・放物型方程式系の解を擬似的な放物・楕円型方程式系の解で評価する;
- Keller-Segel 系との定常問題・エネルギー構造の類似性に注目する.

[*1] e-mail: `fujie@tohoku.ac.jp`