L^2-decay for the critical dissipative nonlinear Schrödinger equation in the Gevrey class

佐藤 拓也　(東北大学・大学院理学研究科 D2)

ここでは以下の非線型 Schrödinger 方程式の初期値問題を考察する.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \lambda |u|^2 u, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

ここで λ は複素数値で, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ である. 初期値問題 (1) において, 係数 λ が実数のとき, 非線型項の次数 3 は解が時刻無限大で自由解に散乱するための臨界指数であり, Barabu-Ozawa 臨界指数と呼ばれる (cf. [1], [8]). 一方, Kita-Shimomura [4], [5] は $\operatorname{Im}\lambda < 0$ とすることで, 方程式 (1) が消散構造を持ち, 解のエネルギーが減衰することを初めて示した (cf. [10], [11]). また, 論文 [4], [5] では 1 次元消散型非線型 Schrödinger 方程式において, 非線型項の次数が 3 以下となる場合に解の減衰を示しており, 指数 3 は解が減衰するための臨界指数であることを示唆している (cf. [2]). Hoshino [3] は初期値問題 (1) において, $r \le 1$ の下で Sobolev 空間 $H^r(\mathbb{R})$ に属す時間大域解を構成し, その L^2-減衰が解の滑らかさに依存することを示した. ここでは高い正則性を持った解の L^2-減衰に関する結果を述べる. 任意の $s \ge 1$ に対して, 以下の Gevrey 空間を導入する.

$$G_v^s(\mathbb{R}) \equiv \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \|f\|_{G_v^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^s} \|\partial_x^k f\|_{L^2} < \infty \right\}.$$

定理 1 ([7], [9])**.** $s \ge 1$ とする. このとき, 正数 ε_0 が存在し, 初期値 u_0 が $G_v^s(\mathbb{R})$ に属し,

$$\|\partial_x u_0\|_{G_v^s} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^s} \|x\partial_x^k u_0\|_{L^2} \le \varepsilon_0$$

を満たすとき, 初期値問題 (1) の解 u が, クラス $C([0,\infty), G_v^s(\mathbb{R}))$ の下で一意に存在する. さらに, ある定数 $C > 0$ に対し, 以下の不等式が成り立つ:

$$\|u(t)\|_{L^2} \le C(\log\log t)^{\frac{s}{2}} (\log t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \ge e^e. \tag{2}$$

初期値問題 (1) において, H^r-正則性を持つ解の L^2-減衰は定数 $C_\varepsilon > 0$ を用いて

$$\|u(t)\|_{L^2} \le C_\varepsilon (\log t)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2r+1)} + \varepsilon} \tag{3}$$

で与えられる (cf. [7]). ここで $r \ge 1$ で, 定数 $C_\varepsilon > 0$ は $\varepsilon \to 0$ のとき, 無限大に発散する. $r \le 1$ の場合, 評価 (3) は論文 [2], [3] において既に知られている. 定理 1 の評価 (2) は評価 (3) において, r を無限大にしたときの結果に対応している.

Li-Sunagawa [6] は微分型非線型項を備えた 1 次元消散型非線型 Schrödinger 方程式における解の L^2-減衰は

$$\|u(t)\|_{L^2} \le C(\log t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \ge e$$

で与えられ, 評価 (2) のような $\log\log t$ の増大度が現れないことを示した.

主定理 1 を示すために初期値問題 (1) の Gevrey クラスにおける時間大域解を構成する. そのため, 解 u に対して成り立つ以下の常微分不等式を考える:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m!)^s}\|\widehat{\partial_x^m u}(t)\|_{L^2}^2 \leq & \frac{\operatorname{Im}\lambda}{t}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m!)^s}\sum_{j+k+\ell=m}\frac{m!}{j!k!\ell!}(\widehat{\partial_x^j u}(t))(\widehat{\partial_x^k u}(t))(\overline{\widehat{\partial_x^\ell u}(t)}) \\
& \times(\overline{\widehat{\partial_x^m u}(t)})\,d\xi+|R(t)| \\
\leq & \frac{\operatorname{Im}\lambda}{t}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m!)^s}|\widehat{u}(t)|^2|\widehat{\partial_x^m u}(t)|^2\,d\xi+|R(t)|\leq|R(t)|.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで $R(t,\xi)$ は剰余項であり, 初期値に依存する量 $\varepsilon_s\equiv\|\partial_x u_0\|_{G_v^s}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^s}\|x\partial_x^k u_0\|_{L^2}$ が十分小さければ, ある定数 $C>0$ が存在して, 任意の $\gamma>0$, $t\geq 0$ に対して

$$
|R(t)|\leq C\varepsilon_s^4 t^{-1-\gamma}
$$

が成り立つ. 条件 $\operatorname{Im}\lambda<0$ より, 常微分不等式 (4) の右辺第一項は上から 0 で評価できるため, (4) の両辺を区間 $[1,t]$ 上で積分することで, ノルム $\|u\|_{G_v^s}$ の一様有界性を得る.

解の L^2-減衰を示すために, 以下の常微分不等式を考える:

$$
\frac{1}{2}\partial_t|\widehat{u}(t)|^2\leq\frac{\operatorname{Im}\lambda}{t}|\widehat{u}(t)|^4+C\varepsilon_s^4 t^{-1-\gamma}. \tag{5}
$$

常微分不等式 (5) により解の漸近形は以下で与えられる:

$$
|\widehat{u}(t,\xi)|^2\simeq\frac{|\widehat{u}(1,\xi)|^2}{1-\operatorname{Im}\lambda\,|\widehat{u}(1,\xi)|^2\log t}.
$$

従って解の漸近形に対し, ξ に関して $\mathbb{R}$ 上で積分を実行すれば, 任意の正数 r に対して, 不等式

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{u}(t)\|_{L^2}^2 &\leq\int_{[-r,r]}\frac{|\widehat{u}(1,\xi)|^2}{1-\operatorname{Im}\lambda\,|\widehat{u}(1,\xi)|^2\log t}\,d\xi+\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]}\frac{|\widehat{u}(1,\xi)|^2}{1-\operatorname{Im}\lambda\,|\widehat{u}(1,\xi)|^2\log t}\,d\xi \\
&\leq 2|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}(\log t)^{-1}r+e^{-2r^{\frac{1}{s}}}\|u\|_{G_v^s}^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

が成り立つ. ここで $r>0$ を $r=r(t)\equiv\left\{\frac{1}{2}\log(|\operatorname{Im}\lambda|\|u\|_{G_v^s}\log t)\right\}^s$ と定めると, 不等式 (6) とノルム $\|u\|_{G_v^s}$ の一様有界性により, 以下の不等式が成り立つ:

$$
\|u(t)\|_{L^2}\leq C(\log\log t)^{\frac{s}{2}}(\log t)^{-\frac{1}{2}},\quad t\geq e^e.
$$

参考文献

[1] Barab, J., J. Math. Phys., **25** (1984), 3270–3273.

[2] Hayashi, N., Li, C., Naumkin, P.I., Adv. Math. Phys., (2016), Art. ID 3702738, 7.

[3] Hoshino, G, J. Math. Phys., **60** (2019), no.11, 111504, 11.

[4] Kita, N., Shimomura, A., J. Differential Equations, **242** (2007) no.1, 192–210.

[5] Kita, N., Shimomura, A., J. Math. Soc. Japan, **61** (2009) no.1, 39–64.

[6] Li, C., Sunagawa, H., Nonlinearity, **29** (2016), 1537.

[7] Ogawa, T., Sato, T., *L^2-decay rate for the critical nonlinear Schrödinger equation with a small smooth data*, preprint, (2019).

[8] Ozawa, T., Comm. Math. Phys., **139** (1991), 479-493.

[9] Sato, T., *L^2-decay estimate for the dissipative nonlinear Schrödinger equation in the Gevrey class*, preprint, (2019).

[10] Sunagawa, H., J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 379–400.

[11] Shimomura, A., Comm. Partial Differential Equations, **31** (2006), 1407–1423.