二つのべき乗型非線形項を持つシュレディンガー方程式の多項式減衰する定在波解の不安定性について [*1]

深谷　法良　(東京理大理)[*]

次の二つのべき乗型非線形項を持つシュレディンガー方程式について考える．

$$(1)\qquad i\partial_t u = -\Delta u + a|u|^{p-1}u - |u|^{q-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N.$$

ここで，$N \in \mathbb{N}$, $a = 1$, $1 < p < q < 1 + 4/(N-2)_+$ とし，$u = u(t,x)$ は複素数値の未知関数である．方程式 (1) の初期値問題はエネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^N)$ において時間局所適切であることが知られている．本講演では (1) の定在波解 $u_\omega(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ について考える．ここで，$\omega \geq 0$ であり ϕ_ω は定常問題

$$(2)\qquad -\Delta\phi + \omega\phi + a|\phi|^{p-1}\phi - |\phi|^{q-1}\phi = 0, \quad \phi \in \begin{cases} H^1(\mathbb{R}^N) & \text{if } \omega > 0 \\ (\dot{H}^1 \cap L^{p+1})(\mathbb{R}^N) & \text{if } \omega = 0 \end{cases}$$

の一意的な正値球対称解である．$\omega > 0$ のとき ϕ_ω は空間遠方で指数減衰するが，ϕ_0 は多項式のオーダーでしか減衰せず，一般に $L^2(\mathbb{R}^N)$ に属さない．

$\omega = 0$ のとき (2) の基底状態の存在や正値球対称解の一意性など楕円型方程式の研究はいくつか知られているが，分散型方程式の観点からの研究はほとんどないようである．本研究では $\omega = 0$ ときを含めた定在波解 $u_\omega(t) = e^{i\omega t}\phi_\omega$ の安定性について考察する．方程式 (1) はスケール不変性がないため，単独のべき ($a = 0$) のときと比べて安定性の解析はずっと難しくなる．

まず [4] によって得られている ϕ_0 の空間遠方の減衰評価から，次の可積分性の条件が得られる：

$$(3)\qquad \phi_0 \in L^2(\mathbb{R}^N) \iff \begin{cases} N \leq 3, & 1 < p < 1 + \dfrac{4}{N}, \\ N = 4, & 1 < p \leq 1 + \dfrac{4}{N}, \\ N \geq 5. \end{cases}$$

主結果を述べるために定在波解の安定性および不安定性について定義する．

定義 1. (1) の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が**安定**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon$ ならば，$u(0) = u_0$ なる (1) の解 $u(t)$ は

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{(\theta,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} \|u(t) - e^{i\theta}\phi_\omega(\cdot - y)\|_{H^1} < \varepsilon$$

を満たすことをいう．**不安定**であるとは，安定でないことをいう．定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が**強不安定**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して $\|u_0 - \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon$ かつ $u(0) = u_0$ なる (1) の解 $u(t)$ は有限時間で爆発することをいう．

---

[*] e-mail: `fukaya@rs.tus.ac.jp`

[*1] 本講演は林 雅行氏（京大数理研）との共同研究に基づく．

$a=1$ かつ $N=1$ のとき，Ohta [3] により以下のことが示されている．
(i) $q \geq 5$ のとき，定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は全ての $\omega > 0$ に対して不安定である．
(ii) $q < 5$ のとき，定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は $\omega > 0$ が十分大きければ安定である．さらに $q < 5$ かつ $p+q > 6$ のとき，定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は $\omega > 0$ が十分小さければ不安定である．

先行研究では $\omega = 0$ の場合は考察されていないことに注意する．また，(ii) で与えられている条件 $p+q>6$ は最適ではないと予想されていた．次が本講演の主結果である．

定理 2. $q \geq 1+4/N$, $\omega \geq 0$ とする．
- $\omega > 0$，または $\omega = 0$ かつ (3) が満たされるとき，定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は強不安定である．
- 条件 (3) が満たされないとき，定在波解 ϕ_0 は次の意味で強不安定である．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して $\|u_0 - \phi_0\|_{\dot{H}^1 \cap L^{p+1}} < \varepsilon$ かつ $u(0) = u_0$ なる (1) の解 $u(t)$ は有限時間で爆発する．

定理 3. $q < 1+4/N$ かつ $\gamma_N(p) < q$ とする．ここで，

$$\gamma_N(p) := \frac{16+N^2+6N-pN(N+2)}{N\{N+2-(N-2)p\}}.$$

このとき，ある $\omega_0 > 0$ が存在して $\omega \in [0, \omega_0]$ ならば定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は不安定である．

注意 4. $q < 1+4/N$ のとき，摂動の議論により十分大きな $\omega > 0$ に対する定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の安定性も証明できる．

注意 5. 定理2と定理3は [3] の結果を多次元に拡張しており，さらに $\omega = 0$ の場合も含んでいる．それだけでなく1次元の場合にも，条件「$1 < p < q < 5$ かつ $\gamma_1(p) < q$」は条件「$1 < p < q < 5$ かつ $p+q > 6$」より真に弱いため，定理3は [3] の結果を改良している．

定理2の証明は Berestycki–Cazenave [1] の議論を用いる．定理3の証明には [2] により与えられた不安定性のための十分条件 $\partial_\lambda^2 E(\phi_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$ を適用する．ここで E はエネルギー汎関数であり，$v^\lambda(x) := \lambda^{N/2} v(\lambda x)$ は L^2 不変なスケール変換である．$\omega = 0$ の場合に着目すると，条件 $\gamma_N(p) < q$ は条件 $\partial_\lambda^2 E(\phi_0^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$ によって特徴付けられる．これらと次の収束性を合わせることにより定理3が証明される．

命題 6. $\omega \searrow 0$ のとき $(\phi_\omega)_{\omega>0}$ は ϕ_0 に $(\dot{H}^1 \cap L^{p+1})(\mathbb{R}^N)$ の位相で収束する．

[1] H. Berestycki and T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293** (1981), 489–492.

[2] M. Ohta, *Instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **62** (1995), 69–80.

[3] M. Ohta, *Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, Kodai Math. J. **18** (1995), 68–74.

[4] L. Véron, *Comportement asymptotique des solutions d'équations elliptiques semi-linéaires dans* $\mathbf{R}^N$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **127** (1981), 25–50.