非線形拡散方程式に対する時空均質化問題

岡 大将 (東北大学 大学院理学研究科)*

本講演では, 次の非線形拡散方程式に対する時空均質化問題について考察する.

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right)\nabla |u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon(x,t)\right),\ x\in\Omega,\ t\in I, \\ |u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon(x,t) = 0,\ x\in\partial\Omega,\ t\in I, \quad u_\varepsilon(x,0)=\varphi(x),\ x\in\Omega. \end{cases}$$

ただし, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, $I=(0,T)$, $0<p,r,\varepsilon<+\infty$ とし, 初期データ φ は簡単のため滑らかな関数とする. 以下では, $\square=(0,1)^N$, $J=(0,1)$ とし, $a=a(y,s):\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{N\times N}$ は滑らかかつ $(\square\times J)$-周期的な $N\times N$ 対称行列場で一様楕円性条件, すなわち, ある $\lambda>0$ が存在し, 任意の $\xi\in\mathbb{R}^N$ に対して

$$\lambda|\xi|^2 \leq a(y,s)\xi\cdot\xi \leq |\xi|^2 \quad \text{for all } (y,s)\in\mathbb{R}^{N+1}$$

を満たすものとする. ここで, r は係数行列 $a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r})$ の時空間周期の対数比に対応していることに注意する. また (P_ε) は, $0<p<1$ ならば Fast Diffusion 方程式, $1<p<+\infty$ ならば多孔質媒体方程式を表し, 特に, $p=1$ のとき, 線形拡散方程式を表す.

(周期的) 均質化問題は, 周期 ε で振動する係数行列を伴う偏微分方程式に対して, $\varepsilon\to 0_+$ としたときに解 u_ε の漸近挙動やその極限が満たす方程式 (**均質化方程式**) を調べる問題である. 本講演では, (P_ε) に対して, $\varepsilon\to 0_+$ としたときに解 u_ε の極限が満たす均質化方程式について考察する. 特に, 均質化方程式に現れる係数行列 (**均質化行列**) が, 対数比 r に応じてどのように表現されるか, また非線形拡散の特徴がどのように反影されるかについて焦点を当てる.

線形拡散に対するこの問題への取り組みは, **漸近展開法** [3] に基づいた形式的な議論によって 70 年代頃から進められており, その後 [5] によって正当化されている. その際, 均質化行列は常に定数行列であり, r の値に応じて異なる表現を持つことが示された. さらに, 非線形拡散に拡張した [4], [6], [8] なども知られている. ここでは, 方程式を一般化しているため, 均質化方程式を導出する程度に留まり, 線形拡散の場合のように均質化行列の特定までは行われていない.

本講演では, 均質化行列に方程式の非線形性の影響がどのタイミングでどのように現れるかについて考察する. さらに, Fast Diffusion 方程式と多孔質媒体方程式による非線形拡散の違いが, 均質化行列の定性的性質にどのような影響をもたらすか注目する. その際, [5] でも用いられた時空 2 スケール収束理論を用いる. これは Nguetseng [7] 及び, Allaire [2] によって確立された 2 スケール収束理論の時空均質化版である.

定義 1 (時空 2 スケール収束)**.** $1<q<\infty$, $0<r<+\infty$ とする. $w_\varepsilon\in L^q(\Omega\times I)$ が $w_0\in L^q(\Omega\times I\times\square\times J)$ に**時空 2 スケール収束する**とは, 任意の $\Phi\in L^{q'}(\Omega\times I; C_{\mathrm{per}}(\square\times J))$ に対して以下が成り立つことを意味する.

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega w_\varepsilon(x,t)\Phi(x,t,\tfrac{x}{\varepsilon},\tfrac{t}{\varepsilon^r})\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega\int_0^1\int_\square w_0(x,t,y,s)\Phi(x,t,y,s)\,dydsdxdt.$$

ただし, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $C_{\mathrm{per}}(\square\times J)$ は $\square\times J$-周期的な連続関数の空間を表す. またこのとき, $w_\varepsilon \xrightarrow{2,2} w_0$ in $L^q(\Omega\times I\times\square\times J)$ と記述する.

時空 2 スケール収束理論を用いることで, 均質化方程式が以下のように特定される.

本講演は赤木 剛朗 教授 (東北大学) との共同研究に基づく. また, 本研究は科学研究費補助金 (JP20H01812, JP18K18715, JP16H03946, JP17H01095, JP20H00117, JP20J10143) 及び, 東北大学学際高等研究教育院の助成を受けたものである.

*e-mail: tomoyuki.oka.q3@dc.tohoku.ac.jp

定理 1 (均質化定理 [1])**.** 各 $\varepsilon > 0$ に対して $u_\varepsilon \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ は $|u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ を満たす (P_ε) の一意弱解とする．このとき，ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $u_0 \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ 及び，$v_1 \in L^2(\Omega \times I; L^2(J; H^1_{\mathrm{per}}(\Box)/\mathbb{R}))$ が存在し，

$$u_{\varepsilon_n} \to u_0 \text{ weakly in } \ W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega)),$$
$$|u_0|^{p-1}u_0 \in L^2(I; H_0^1(\Omega)), \quad |u_{\varepsilon_n}|^{p-1}u_{\varepsilon_n} \to |u_0|^{p-1}u_0 \quad \text{weakly in } \ L^2(I; H_0^1(\Omega)),$$
$$a(\tfrac{x}{\varepsilon_n}, \tfrac{t}{\varepsilon_n^r})\nabla|u_{\varepsilon_n}|^{p-1}u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2,2} a(y,s)(\nabla|u_0|^{p-1}u_0 + \nabla_y v_1) \quad \text{in } \ [L^2(\Omega \times I \times \Box \times J)]^N$$

が成り立つ．ただし $H^1_{\mathrm{per}}(\Box)/\mathbb{R} = \{\rho \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \colon \rho$ is $\Box$-periodic and $\int_\Box \rho(y)\,dy = 0\}$ とする．さらに，u_0 は次の均質化方程式の弱解となる．

$$(P_0) \qquad \begin{cases} \partial_t u_0(x,t) = \operatorname{div} j_{\mathrm{hom}}(x,t), \ x \in \Omega, \ t \in I, \\ |u_0|^{p-1}u_0(x,t) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in I, \quad u_0(x,0) = \varphi(x), \ x \in \Omega. \end{cases}$$

ただし $j_{\mathrm{hom}} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^N$ は次の均質化された拡散束を表す関数とする．

$$j_{\mathrm{hom}}(x,t) := \int_0^1 \int_\Box a(y,s)\left(\nabla|u_0|^{p-1}u_0(x,t) + \nabla_y v_1(x,t,y,s)\right)\,dyds. \tag{1}$$

さらに (1) を均質化行列 a_{hom} とベクトル $\nabla|u_0|^{p-1}u_0$ の積として表すことができる．

定理 2 (均質化行列の表現 [1])**.** 指数 p を $0 < p < 2$ とする．また，関数 $u_0 \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ を $|u_0|^{p-1}u_0 \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ を満たす (P_0) の弱解とする．このとき，$j_{\mathrm{hom}} = a_{\mathrm{hom}}\nabla|u_0|^{p-1}u_0$ と表すことができ，均質化行列 $a_{\mathrm{hom}} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ は次のように特徴づけられる．

(i) $0 < r < 2$ の場合，a_{hom} は定数行列で，以下によって与えられる．

$$a_{\mathrm{hom}} e_k = \int_0^1 \int_\Box a(y,s)\left(\nabla_y \Phi_k(y,s) + e_k\right)\,dyds. \tag{2}$$

ただし，e_k は $\mathbb{R}^N$ の標準基底の k 番目の基本ベクトルを表し，$\Phi_k \in L^2(J; H^1_{\mathrm{per}}(\Box)/\mathbb{R})$ は次のセル問題の一意的な超関数解とする．

$$-\operatorname{div}_y\left(a(y,s)[\nabla_y \Phi_k(y,s) + e_k]\right) = 0 \quad in \quad \mathscr{D}'_{\mathrm{per}}(\Box \times J).$$

(ii) $r = 2$ の場合，a_{hom} は (2) と同様に特徴づけられるが，Φ_k は $(x,t) \in \Omega \times I$ に対して，次のセル問題の超関数解とする．

$$\frac{1}{p}|u_0(x,t)|^{1-p}\partial_s \Phi_k(x,t,y,s) - \operatorname{div}_y\left(a(y,s)\left[\nabla_y \Phi_k(x,t,y,s) + e_k\right]\right) = 0$$

in $\mathscr{D}'_{\mathrm{per}}(\Box \times J)$．よって，$a_{\mathrm{hom}}$ は (x,t) の関数である．ただし，$1 < p < 2$ (*porous medium*) のとき，$u_0(x,t) = 0$ となる $(x,t) \in \Omega \times I$ に対して，$\Phi_k(x,t,\cdot,\cdot) \equiv 0$ とする．すなわち，$a_{\mathrm{hom}}(x,t)$ は $a(y,s)$ の単純平均である．

(iii) $2 < r < +\infty$ の場合，a_{hom} は定数行列で，以下によって与えられる．

$$a_{\mathrm{hom}} e_k = \int_\Box \langle a(y,s)\rangle_s (\nabla_y \Phi_k(y) + e_k)\,dy, \quad \langle a(y,s)\rangle_s := \int_0^1 a(y,s)\,ds.$$

ここで，$\Phi_k \in H^1_{\mathrm{per}}(\Box)/\mathbb{R}$ は次のセル問題の一意的な超関数解とする．

$$-\operatorname{div}_y\left(\langle a(y,s)\rangle_s [\nabla_y \Phi_k(y) + e_k]\right) = 0 \quad in \quad \mathscr{D}'_{\mathrm{per}}(\Box).$$

特に，$r \neq 2$ に対して，u_0 は一意的に定まり，(u_ε) は u_0 へ全列収束する．

各セル問題の解 Φ_k を用いることで, 均質化行列に関する以下の性質が得られる.

命題 1 (均質化行列の定性的性質 [1]). 定理 2 の仮定の下, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) (一様楕円性) 一様楕円性の仮定で与えられる定数 $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda\alpha \le a_{\mathrm{hom}}(x,t)\xi\cdot\xi \le \alpha, \quad \alpha = \sum_{k=1}^{N}(1+\|\nabla_y\Phi_k(x,t,\cdot,\cdot)\|_{L^2(\square\times J)}^2)|\xi_k|^2$$

が任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対して成り立つ. ただし, Φ_k は定理 2 で現れたパラメータ $0 < r < +\infty$ に対応するセル問題の超関数解である.

(ii) (対称性と非対称性) 「$r \neq 2$」または「$r = 2$ かつ $u_0(x,t) = 0$」のとき, $a_{\mathrm{hom}}(x,t)$ は対称であり, 「$r = 2$ かつ $u_0(x,t) \neq 0$」のとき, $a_{\mathrm{hom}}(x,t)$ は非対称である.

さらに, 定理 1 で得られた v_1 はセル問題の解 Φ_k を用いて

$$v_1 = \sum_{k=1}^{N}\partial_{x_k}|u_0|^{p-1}u_0\Phi_k$$

と表されることに注意すると, $\nabla_y v_1$ を修正項とした次の (P_ε) の解の勾配に対する強収束性が得られ, それに伴い, 解の時間微分に対する修正項つきの強収束性も得られる.

定理 3 (Corrector results [1]). 定理 2 の仮定の下, Φ_k をパラメータ $0 < r < +\infty$ に対応するセル問題の解とする. このとき, $\varepsilon_n \to 0_+$ とすると以下が成り立つ.

$$\int_0^T\int_\Omega\Bigl|\nabla|u_{\varepsilon_n}|^{p-1}u_{\varepsilon_n} - \nabla|u_0|^{p-1}u_0 - \sum_{k=1}^{N}\left(\partial_{x_k}|u_0|^{p-1}u_0\right)\nabla_y\Phi_k\left(x,t,\tfrac{x}{\varepsilon_n},\tfrac{t}{\varepsilon_n^r}\right)\Bigr|^2 dxdt \to 0.$$

さらに, 時間微分に対しても以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\int_0^T\Bigl\|\partial_t u_{\varepsilon_n} - \partial_t u_0 - \mathrm{div}\Bigl[a\bigl(\tfrac{x}{\varepsilon_n},\tfrac{t}{\varepsilon_n^r}\bigr)\Bigl(\nabla|u_0|^{p-1}u_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\partial_{x_k}|u_0|^{p-1}u_0\right)\nabla_y\Phi_k\left(x,t,\tfrac{x}{\varepsilon_n},\tfrac{t}{\varepsilon_n^r}\right)\Bigr)\\ - \Bigl\langle a(y,s)\bigl[\nabla|u_0|^{p-1}u_0 + \sum_{k=1}^{N}(\partial_{x_k}|u_0|^{p-1}u_0)\nabla_y\Phi_k(x,t,y,s)\bigr]\Bigr\rangle_{y,s}\Bigr]\Bigr\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \to 0.\end{aligned}$$

参考文献

[1] G. Akagi, T. Oka, Space-time homogenization for nonlinear diffusion, arXiv:2007.09977.

[2] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 1482–1518.

[3] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[4] Y. Efendiev, A. Pankov, Homogenization of nonlinear random parabolic operators, Adv. Differential Equations **10** (2005), 1235–1260.

[5] A. Holmbom, Homogenization of parabolic equations an alternative approach and some corrector-type results, Appl. Math. **42** (1997), 321–343.

[6] H. Jian, On the homogenization of degenerate parabolic equations, Acta Math. Appl. Sinica. **16** (2000), no.1, 100–110.

[7] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), 608–623.

[8] J.-L. Woukeng, Periodic homogenization of nonlinear non-monotone parabolic operators with three time scales, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **189** (2010), no. 3, 357–379.