

# Singular Neumann boundary problems for a class of fully nonlinear parabolic equations in one dimension\*

可香谷 隆 (九州大学, マス・フォア・インダストリ研究所)<sup>†</sup>

## 1 導入

本講演の内容は、福岡大学の柳青氏との共同研究に基づくものである。本講演では、以下の発散型ノイマン境界条件付きの1次元完全非線形放物型方程式を考察する。

$$\begin{cases} u_t - f(g(u_x)u_{xx}) = 0 & \text{in } (-b, b) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u_x(b, t) = \infty, \quad u_x(-b, t) = -\infty & \text{for any } t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } [-b, b]. \end{cases} \quad (1.3)$$

ただし、 $b > 0$  とし、 $f, g \in C(\mathbb{R})$  は以下の仮定を満たすものとする。

(A1)  $f$  は  $f(0) = 0$  と  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(s) = \pm\infty$  を満たす狭義単調増加関数

(A2)  $g$  常に正の値を取り、ある定数  $\alpha \in \mathbb{R}$  と  $C_{\pm} > 0$  が存在し、以下の条件を満たす。

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} |s|^{\alpha} g(s) = C_{\pm}.$$

方程式の具体例の一つとして、動く曲線の法線速度  $V$ 、曲率  $\kappa$  と正の定数  $\beta > 0$  を用いた冪型曲率流方程式  $V = |\kappa|^{\beta-1} \kappa$  に対し、解がグラフ表示できることを仮定した方程式が挙げられ、この場合、

$$f(s) = |s|^{\beta-1} s, \quad g(s) = (1 + s^2)^{\frac{1-3\beta}{2\beta}} \quad (1.4)$$

と表記できる。また、発散型ノイマン境界条件 (1.2) は、グラフの左右の端点において、 $\{x = b\}$  または  $\{x = -b\}$  との接触角  $\theta_+, \theta_- \in (0, \pi)$  を生成する接触角条件

$$u_x(\pm b, t) = \pm \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\pm}\right) \quad \text{for any } t > 0 \quad (1.5)$$

に対する  $\theta_{\pm} \rightarrow 0$  とし、極限を取った境界条件と見做せる。

$f(s) = s, g \in C^{\infty}(\mathbb{R}; (0, \infty))$  の場合の、(1.5) を境界条件とした方程式 (1.1) は [1] で考察され、初期値問題に対する古典解の時間大域的存在性、滑らかな進行波解の存在性・安定性に関する結果が得られている。ただし、ここでの進行波解は、ある関数  $W$  と定数  $c$  を用いて、

$$W(x) + ct \quad (1.6)$$

として記述できる解を指す。一方、本研究で扱う、(A1) と (A2) の仮定の下での方程式 (1.1)–(1.2) では、(A2) の仮定内の  $\alpha$  の値によって、進行波解の構造が変わり、以下のように確かめられる。(1.6) で表記される進行波解の存在を仮定した時、(1.1) に代入することにより、

$$g(W_x)W_{xx} = f^{-1}(c) \quad \text{for } x \in (-b, b) \quad (1.7)$$

が従う。ここで、形式的な計算ではあるが、 $\alpha > 1$  であることと、 $x = b$  の近傍で、ある  $\gamma < 0$  を用いて

\*本研究は柳青氏 (福岡大学) との共同研究である

<sup>†</sup>E-mail: kagaya@imi.kyushu-u.ac.jp

$W'(x) \approx (b-x)^\gamma$  のオーダーで微分が発散していることを仮定すると、

$$\lim_{x \rightarrow b} W(x) = \begin{cases} \infty & \text{if } \gamma \leq -1, \\ \text{const.} & \text{if } -1 < \gamma < 0, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(W_x(x))W_{xx}(x) = \begin{cases} \infty & \text{if } \frac{1}{1-\alpha} < \gamma < 0, \\ \text{const.} & \text{if } \gamma = \frac{1}{1-\alpha}, \\ 0 & \text{if } \gamma < \frac{1}{1-\alpha} \end{cases} \quad (1.8)$$

が従う。この計算と (1.7) より、 $\alpha > 2$  の時に有界な進行波解が存在し、 $\alpha \leq 2$  の時に進行波解が存在する場合には、その進行波解は非有界でなければならないことが予想される。従って、本研究の目標は、 $\alpha$  に依存した、初期値問題 (1.1)–(1.2) に対する有界な解の存在性・非存在性理論の構築、及び、解が時間大域的に存在した場合の漸近挙動解析である。

**Remark 1.1.**  $f$  と  $g$  を (1.4) とした場合、(1.8) の 2 つ目の極限は以下のように書き換えられる。ただし、 $\beta > 1/2$  とする。

$$\lim_{x \rightarrow b} g(W_x(x))W_{xx}(x) = \begin{cases} \infty & \text{if } \frac{\beta}{1-2\beta} < \gamma < 0, \\ \text{const.} & \text{if } \gamma = \frac{\beta}{1-2\beta}, \\ 0 & \text{if } \gamma < \frac{\beta}{1-2\beta} \end{cases}$$

従って、この場合には、 $\beta > 1$  の時の有界な進行波解の存在性と、 $\beta \leq 1$  の時の進行波解の非有界性が予想される。

## 2 主結果

本研究では、完全非線形偏微分方程式に対する解の存在性理論の構築で有効的である粘性解を扱い、発散型ノイマン境界条件付きのある楕円型方程式が考察されている [3] で定義されている境界条件を用いる。以下、 $Q = (-b, b) \times (0, \infty)$  とする。

**Definition 2.1.**

- $\bar{Q}$  上の上半連続関数  $u$  が、任意の  $\phi \in C^2(\bar{Q})$  と  $u - \phi$  の任意の極大点  $(x_0, t_0) \in Q$  に対して、

$$\phi_t(x_0, t_0) - f(g(\phi_x(x_0, t_0))\phi_{xx}(x_0, t_0)) \leq 0$$

を満たす時、 $u$  を (1.1)–(1.2) に対する劣解と呼ぶ。

- $\bar{Q}$  上の下半連続関数  $u$  が、以下の (i), (ii) を満たす時、 $u$  を (1.1)–(1.2) に対する優解と呼ぶ。

(i) 任意の  $\phi \in C^2(\bar{Q})$  と  $u - \phi$  の任意の極小点  $(x_0, t_0) \in Q$  に対して、

$$\phi_t(x_0, t_0) - f(g(\phi_x(x_0, t_0))\phi_{xx}(x_0, t_0)) \geq 0.$$

(ii) 任意の  $\phi \in C^2(\bar{Q})$  と  $t > 0$  に対して、 $u - \phi$  は  $(\pm b, t)$  で極小値を取らない。

- 関数  $u \in C(\bar{Q})$  が、劣解であり、優解である時、 $u$  を (1.1)–(1.2) に対する解と呼ぶ。

本研究の主結果は以下の通りである。

**Theorem 2.2** ([2]). (A1) と  $\alpha \leq 2$  とした (A2) を仮定する。この時、(1.1)–(1.2) に対する解  $u \in C(\bar{Q})$  は存在しない。

上記の定理を示す際に、以下の性質を持つ劣解の列  $\{\phi_n\}$  を構成した。

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, x \in [-b, b]} |\phi_n(x, 0)| < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\pm b, t) = \infty \text{ for } t > 0.$$

従って、上記の仮定の下では、 $t > 0$  に対して、解は  $(\pm b, t)$  で発散しなければならない。

**Theorem 2.3** ([2]). (A1) と  $\alpha > 2$  とした (A2) を仮定する。この時、 $u_0 \in C([-b, b])$  を初期値とした時間大域的な解  $u \in C(\bar{Q})$  が一意に存在する。

**Theorem 2.4** ([2]). (A1) と  $\alpha > 2$  とした (A2) を仮定する. この時, 以下が成り立つ.

- 凸関数  $W \in C^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}([-b, b]) \cap C^2((-b, b))$  と定数  $c > 0$  が存在し, (1.6) によって定義される進行波解を構成する. さらに,  $W$  は高さ方向の平行移動を除いて一意で,  $c$  も一意である.
- $f^{-1}$  は  $s = 0$  の近傍を除いてリプシッツで,  $g$  は  $\mathbb{R}$  でリプシッツとする. さらに,  $u_0 \in C([-b, b])$  は凸であるとする. この時, ある定数  $m \in \mathbb{R}$  が存在し, (1.1)–(1.3) に対する時間大域解  $u \in C(\overline{Q})$  は以下を満たす.

$$\sup_{x \in [-b, b]} |u(x, t) - (W(x) + m + ct)| \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

## 参考文献

- [1] S. J. Altschuler and L.-F. Wu, *Convergence to translating solutions for a class of quasilinear parabolic boundary problems*, Math. Ann., 295(4):761–765, 1993.
- [2] T. Kagaya and Q. Liu, *Singular Neumann boundary problems for a class of fully nonlinear parabolic equations in one dimension*, to appear in SIAM J. Math. Anal.
- [3] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints. I. The model problem*, Math. Ann., 283(4):583–630, 1989.