摂動半空間におけるNavier–Stokes方程式の定常解

鈴木 政尋*（名古屋工業大学）

本講演の内容は，New York 大学の Katherine Zhiyuan Zhang 氏との共同研究に基づくものである．圧縮粘性流体の定常流を論じる．圧縮粘性流体の運動は，次の Navier–Stokes 方程式で記述される．

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{1a}$$

$$\rho\{\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\} = \mu_1\Delta\boldsymbol{u} + (\mu_1+\mu_2)\nabla(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) - \nabla p(\rho). \tag{1b}$$

ここで，ρ, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ は，それぞれ密度，速度を表す未知関数である．関数 p は圧力を表し，$p(\rho) := K\rho^\gamma$ で与えられるとする．ここで，$K > 0$ 及び $\gamma \geq 1$ は定数である．粘性係数 μ_1, μ_2 は，$\mu_1 > 0$ と $2\mu_1 + 3\mu_2 \geq 0$ を満たす定数とする．次の摂動半空間 Ω において，方程式系 (1a), (1b) の初期値境界値問題を取り扱う．

$$\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > M(x_2, x_3)\}, \quad M \in H^9(\mathbb{R}^2).$$

初期値及び境界値は，次にように課す．

$$(\rho, \boldsymbol{u})(0, x) = (\rho_0, \boldsymbol{u}_0)(x), \tag{1c}$$

$$\boldsymbol{u}(t, M(x_2, x_3), x_2, x_3) = \boldsymbol{u}_b(x_2, x_3) = (u_{b1}, u_{b2}, u_{b3})(x_2, x_3),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2, \tag{1d}$$

$$\lim_{x_1\to\infty} (\rho, u_1, u_2, u_3)(t, x_1, x_2, x_3) = (\rho_+, u_+, 0, 0). \tag{1e}$$

初期値 ρ_0 は強正値性を，境界値 $\boldsymbol{u}_b$ は流出条件を満たすとする．すなわち，

$$\inf_{x\in\Omega} \rho_0(x) > 0, \quad \inf_{x\in\partial\Omega} (\boldsymbol{u}_b \cdot \boldsymbol{n})(x) > 0.$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は領域 Ω の外向き単位法線ベクトルである．無限遠の値 (ρ_+, u_+) は，以下を満たす定数とする．第二式は超音速条件である．

$$\rho_+ > 0, \quad \frac{|u_+|}{\sqrt{p'(\rho_+)}} > 1. \tag{2}$$

Navier–Stokes 方程式 (1a), (1b) の初期値境界値問題は古くから研究され，多くの研究成果が報告されている．とくに，Kawashima–Nishibata–Zhu [1] は，1 次元半空間において定常解の存在と安定性を証明した．その後，Kagei–Kawashima [2] により，3 次元半空間においても同様な結果が示された．この結果を半空間から曲がった境界を持つ領域へ拡張することは興味深い．本講演では，摂動半空間 Ω において問題 (1) の定常解の存在と安定性について論じる．

主結果を述べるために，1 次元半空間における定常解 $(\tilde\rho, \tilde u)(x_1)$ の存在定理を紹介する．この定常解は次を満たす．

$$(\tilde\rho\tilde u)' = 0, \quad (\tilde\rho\tilde u^2 + p(\tilde\rho))' = (2\mu_1 + \mu_2)\tilde u'', \quad x_1 > 0,$$
$$\tilde u(0) = \tilde u_b, \quad \lim_{x_1\to\infty} (\tilde\rho, \tilde u)(x_1) = (\rho_+, u_+), \quad \inf_{x_1\in\mathbb{R}_+} \tilde\rho(x_1) > 0.$$

ここで，$\tilde u_b$ は定数であり，$\tilde\delta := |\tilde u_b - u_+|$ と定める．

*E-mail: masahiro@nitech.ac.jp

定理 1 ([1]). 無限遠の値 (ρ_+,u_+) は (2) を満たすとする．このとき，ある定数 $w_c<1$ があって，定常解 $(\tilde{\rho},\tilde{u})$ が存在するための必要十分条件は，次で与えられる．

$$u_+<0 \text{ かつ } \tilde{u}_b<w_c u_+. \tag{3}$$

境界値 $\boldsymbol{u}_b-(\tilde{u}_b,0,0)\in H^{13/2}(\partial\Omega)$ の拡張を $U\in H^7(\Omega)$ と表し，δ を次で定める．

$$\delta:=\|\boldsymbol{u}_b-(\tilde{u}_b,0,0)\|_{H^{13/2}(\partial\Omega)}+\tilde{\delta}$$

このとき，半空間の定常解 $(\tilde{\rho},\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{M}(x))$ と拡張 $U(x)$ の和からの摂動を考え，問題 (1) の定常解 $(\rho^s,\boldsymbol{u}^s)(x)$ を構成した．ここで，$\tilde{M}(x):=x_1-M(x_2,x_3)$, $\tilde{\boldsymbol{u}}=(\tilde{u},0,0)$ である．また，正定数 α に対して，関数空間 $L^2_\alpha(\Omega)$ を次で定める．

$$L^2_\alpha(\Omega):=\left\{f\in L^2(\Omega)\;\middle|\;\|f\|_{L^2_\alpha}<\infty\right\},\quad \|f\|^2_{L^2_\alpha}:=\int_\Omega e^{\alpha x_1}|f|^2\,dx.$$

定常解 $(\rho^s,\boldsymbol{u}^s)$ の存在と安定性は，以下の定理にまとめられる．ここでは，領域 Ω の境界を表す関数 M のノルムには，如何なる制限も課されていない．

定理 2. 無限遠の値 (ρ_+,u_+) は (2) 及び (3) を満たすとする．このとき，ある正定数 β と $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\beta,\Omega)$ があって，$\delta\le\varepsilon_0$ ならば，問題 (1) は定常解 $(\rho^s,\boldsymbol{u}^s)$ を持つ．この定常解は次を満たし，そのような定常解は唯一つである．

$$(\rho^s-\tilde{\rho}\circ\tilde{M},\boldsymbol{u}^s-\tilde{\boldsymbol{u}}\circ\tilde{M}-U)\in L^2_\beta(\Omega)\cap H^5(\Omega),$$
$$\|(\rho^s-\tilde{\rho}\circ\tilde{M},\boldsymbol{u}^s-\tilde{\boldsymbol{u}}\circ\tilde{M}-U)\|^2_{L^2_\beta}+\|(\rho^s-\tilde{\rho}\circ\tilde{M},\boldsymbol{u}^s-\tilde{\boldsymbol{u}}\circ\tilde{M}-U)\|^2_{H^5}\le C_0\delta.$$

ここで，$C_0=C_0(\beta,\Omega)$ は β と Ω に依る正定数である．

定理 3. 無限遠の値 (ρ_+,u_+) は (2) 及び (3) を満たすとする．このとき，ある正定数 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\beta,\Omega)$ があって，$\|(\rho_0-\rho^s,\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}^s)\|_{H^3}+\delta\le\varepsilon_0$ であり，初期値 $(\rho_0,\boldsymbol{u}_0)$ が両立条件を満たすならば，問題 (1) は時間大域解 $(\rho,\boldsymbol{u})$ を持つ．この大域解は次を満たし，そのような大域解は唯一つである．

$$\rho-\rho^s\in\cap_{i=0}^1 C^i([0,\infty);H^{3-i}(\Omega)),\quad \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^s\in\cap_{i=0}^1 C^i([0,\infty);H^{3-2i}(\Omega)).$$

さらに，次の減衰評価が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\Omega}|(\rho-\rho^s,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^s)(t,x)|=0.$$

論文 [2] では境界条件 $\boldsymbol{u}_b=(\tilde{u}_b,0,0)$ を採用している．この境界条件に対して定理 2, 3 を適用できる．さらに，$\|M\|_{H^9}\ll 1$ ならば，定理 2, 3 における ε_0, C_0 は Ω に依らないことが分かり，境界条件 $\boldsymbol{u}_b=\tilde{u}_b\boldsymbol{n}$ に対しても，定理 2, 3 を適用できる．

参考文献

[1] S. Kawashima, S. Nishibata, and P. Zhu, *Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), no. 3, 483–500.

[2] Y. Kagei and S. Kawashima, *Stability of planar stationary solutions to the compressible Navier-Stokes equation on the half space*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), no. 2, 401–430.

[3] M. Suzuki and K. Z. Zhang, *Stationary flows for compressible viscous fluid in a perturbed half-space*, arXiv:1910.05604.