Decay property of solutions to the semilinear wave equation with space-dependent damping and absorbing nonlinearity

若杉 勇太（広島大学）

次の非線形消散型波動方程式の初期値境界値問題を考える．

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)\partial_t u + |u|^{p-1}u = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の外部領域で滑らかな境界をもつもの，または $\Omega = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ とする．$u = u(t,x)$ は実数値の未知関数とし，$a(x)$ は正値かつ滑らかな関数で，すべての導関数が有界であるとする．また初期値 (u_0, u_1) は $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ に属するとする．非線形項の指数 p は

$$1 < p < \infty \ (n = 1, 2), \quad 1 < p \leq \frac{n}{n-2} \ (n \geq 3)$$

をみたすとする．このとき，(1) の時間大域解 $u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$ の一意存在を標準的な議論で示すことができる．

目標は，解のエネルギー

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2)\,dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u(t,x)|^{p+1}\,dx$$

および重み付き L^2 ノルム

$$\int_\Omega a(x)|u(t,x)|^2\,dx$$

email: wakasugi@hiroshima-u.ac.jp

の減衰評価を与えることである．特に，摩擦項の係数 $a(x)$ の大きさ，非線形項の指数 p, 初期値の空間遠方での減衰度の 3 つの要素が解の減衰に与える影響について明らかにすることが目標である．

この問題について，Nishihara [2] により，$\Omega = \mathbb{R}^n$，かつ，初期値がコンパクト台をもつ場合に，次のような減衰評価が示された：

(i) $a(x) = a_0\langle x\rangle^{-\alpha}$ $(a_0 > 0,\ \alpha \in [0, 1))$ のとき，

$$(1+t)E(t) + \int_\Omega a(x)|u(t,x)|^2\,dx \le C(1+t)^{-\frac{n-\alpha}{2-\alpha}+\delta}. \tag{2}$$

ただし，$\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ であり，δ は任意の正数である．

(ii) $a_0\langle x\rangle^{-\alpha} \le a(x) \le a_1\langle x\rangle^{-\alpha}$ $\ (a_0, a_1 > 0, \alpha \in [0, 1))$ のとき，

$$\begin{aligned}(1+t)E(t) &+ \int_\Omega a(x)|u(t,x)|^2\,dx \\ &\le C\begin{cases}(1+t)^{-\frac{4}{2-\alpha}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{n-\alpha}{4}\right)} & (p > p_{subc}(n,\alpha)),\\ (1+t)^{-\frac{2}{p-1}}\log(2+t) & (p = p_{subc}(n,\alpha)),\\ (1+t)^{-\frac{2}{p-1}} & (p < p_{subc}(n,\alpha)).\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

ただし，ここで

$$p_{subc}(n,\alpha) = 1 + \frac{2\alpha}{n-\alpha} \tag{4}$$

である．

上の Nishihara [2] の結果から次のことがわかる：まず，$a(x)$ が (i) の条件をみたすとき，すなわち $a(x) = a_0\langle x\rangle^{-\alpha}$ $(a_0 > 0,\ \alpha \in [0, 1))$ のときは，(i), (ii) 両方の結果が適用できる．このとき，まず $p > p_F(n-\alpha) = 1 + \frac{2}{n-\alpha}$（優臨界）の場合は，式 (2) が最も速い減衰を与える．式 (2) の右辺はすでに知られている線形問題の解の減衰レートと同じであり，これから優臨界の場合は，非線形項は摂動とみなせて，解は線形解と同じ速さで減衰することがわかる．次に $1 < p < p_F(n-\alpha)$（劣臨界）の場合は，式 (3) が最も速い減衰を与える．これは線形解の減衰よりも速く，吸収型非線形項の影響により解の減衰が速くなっていることを表している．また，式 (4) で与えられる指数を境に，解の減衰の速さがさらに変化することがわかる．

本研究では，Nishihara [2] の結果の初期値の台のコンパクト性の仮定を取り除き，初期値の空間遠方の減衰度と解の減衰度の関係を調べた．また，摩擦項の係数 $a(x)$ について，特に (i) の結果で $a(x) = a_0\langle x\rangle^{-\alpha}$ の形に限定されていた部分を，より一般的な $a(x)$ に対するものに拡張を行なった．以下が本講演の主結果である．

定理 1. (i) ある $a_0>0$ と $\alpha\in[0,1)$ が存在して，

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^\alpha a(x)=a_0$$

が成立するとする．また，ある $\lambda\in[0,\frac{n-\alpha}{2-\alpha})$ が存在して，初期値は

$$\int_\Omega\left[(|u_1(x)|^2+|\nabla u_0(x)|^2+|u_0(x)|^{p+1})\langle x\rangle^\alpha+|u_0(x)|^2\langle x\rangle^{-\alpha}\right]\langle x\rangle^{\lambda(2-\alpha)}\,dx<\infty \quad (5)$$

をみたすとする．このとき，任意の $t>0$ に対して

$$(1+t)E(t)+\int_\Omega a(x)|u(t,x)|^2\,dx\le C(1+t)^{-\lambda}.$$

(ii) ある $a_0,a_1>0,\ \alpha\in[0,1)$ が存在して，

$$a_0\langle x\rangle^{-\alpha}\le a(x)\le a_1\langle x\rangle^{-\alpha}$$

が成立するとする．また，ある $\lambda\in[0,\infty)$ が存在して，初期値は (5) をみたすとする．このとき，任意の $t>0$ に対して

$$(1+t)E(t)+\int_\Omega a(x)|u(t,x)|^2\,dx$$
$$\le C\begin{cases}(1+t)^{-\lambda} & (\lambda<\min\{\frac{4}{2-\alpha}(\frac{1}{p-1}-\frac{n-\alpha}{4}),\frac{2}{p-1}\}),\\ (1+t)^{-\lambda}\log(2+t) & (\lambda=\min\{\frac{4}{2-\alpha}(\frac{1}{p-1}-\frac{n-\alpha}{4}),\frac{2}{p-1}\},\ p\ne p_{subc}),\\ (1+t)^{-\lambda}(\log(2+t))^2 & (\lambda=\frac{4}{2-\alpha}(\frac{1}{p-1}-\frac{n-\alpha}{4})=\frac{2}{p-1}\ \text{i.e.}\ p=p_{subc}(n,\alpha)),\\ (1+t)^{-\frac{4}{2-\alpha}(\frac{1}{p-1}-\frac{n-\alpha}{4})} & (\lambda>\frac{4}{2-\alpha}(\frac{1}{p-1}-\frac{n-\alpha}{4}),\ p>p_{subc}(n,\alpha)),\\ (1+t)^{-\frac{2}{p-1}}\log(2+t) & (\lambda>\frac{2}{p-1},\ p=p_{subc}(n,\alpha)),\\ (1+t)^{-\frac{2}{p-1}} & (\lambda>\frac{2}{p-1},\ p<p_{subc}(n,\alpha)).\end{cases}$$

注意 2. $a(x)$ が (i) の条件をみたす場合は，(i), (ii) 両方の結果を適用できる．この場合に，$(n,\alpha)=(3,\frac{1}{2})$ のときの重み付き L^2 ノルム $\int_\Omega a(x)|u(t,x)|^2\,dx$ の減衰率を p-λ 平面内に図示したものが以下の図 1 である．

p を固定して λ を 0 から増加させていくとき，はじめのうち解は λ の増加に応じて $(1+t)^{-\lambda}$ の減衰度をもつ．これは初期値の減衰度が速くなるのに応じて解の減衰も速くなっていくことを示している．しかし，λ がある閾値（図内の曲線）に到達してからは，解の減衰度はそれ以上は速くならずに一定の値をとる．また，λ の閾値となる曲線上では log オーダーのロスが発生する．さらに，$p=p_{subc}(n,\alpha)$ の直線上では，λ の閾値 $\lambda=\frac{n-\alpha}{\alpha}$ を超えたところで log オーダーのロス，ちょうど閾値 $\lambda=\frac{n-\alpha}{\alpha}$ のところで log の 2 乗オーダーのロスが発生する．

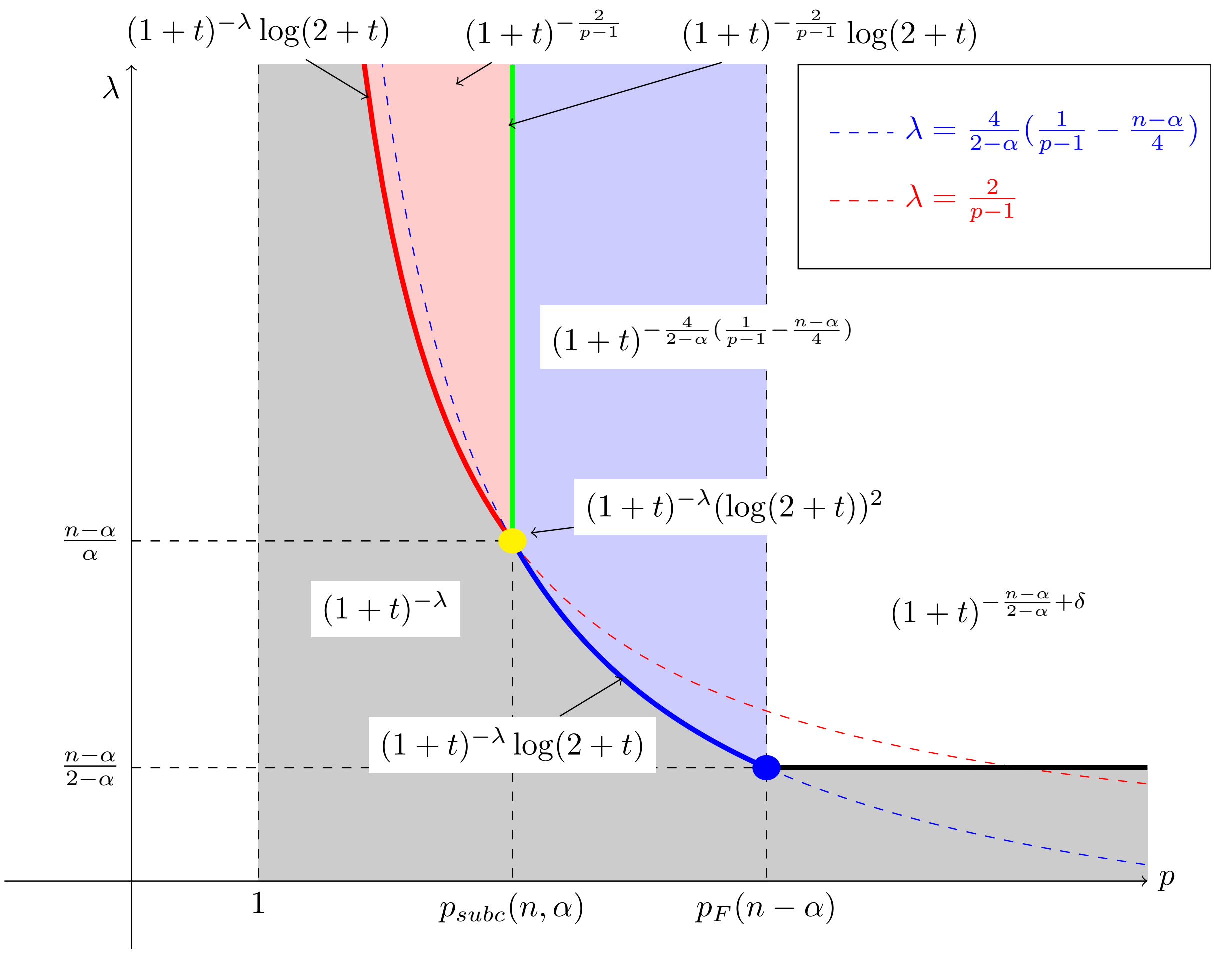

図 1　Classification of decay rates in p-λ plane when $(n, \alpha) = (3, \frac{1}{2})$

参考文献

[1] R. Ikehata, K. Nishihara, H. Zhao, *Global asymptotics of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equation with absorption*, J. Differential Equations **226** (2006), 1–29.

[2] K. Nishihara, *Decay properties for the damped wave equation with space dependent potential and absorbed semilinear term*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), 1402–1418.

[3] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Supersolutions for parabolic equations with unbounded or degenerate diffusion and its applications to some classes of parabolic and hyperbolic equations*, to appear in J. Math. Soc. Japan.