弱い緩和項を持つ対称双曲型方程式系の消散構造と安定性解析

上田 好寛 (神戸大学大学院海事科学研究科)

本講演の研究内容は，九州大学の川島秀一氏と香港中文大学の Renjun Duan 氏との共同研究である．

本講演では，緩和項付き線形対称双曲型方程式系の初期値問題：

$$A^0 u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Lu = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

について考察する．ここで，$u = u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は未知のベクトル値関数とし，初期値を $u_0 = u_0(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ で与える．また，A^j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ と L は実数値からなる $m \times m$ の定数行列であり，A^j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ は対称で A^0 は正値とし，L は非負値であり $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$ と定める．

緩和項に現れる係数行列 L が対称な場合, つまり係数行列に次の条件：

Condition (A)$_0$:

$$(A^j)^T = A^j \quad \text{for} \quad j = 0, 1, \cdots, n, \qquad L^T = L,$$

$$A^0 > 0, \quad L \geq 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C}^m, \qquad \mathrm{Ker}(L) \neq \{0\},$$

を仮定する場合，Umeda-Kawashima-Shizuta [4] によって解の漸近安定性と定量的な時間減衰評価が導かれ，更には Shizuta-Kawashima [5] によって安定性が示されるための条件が導かれた．ここで，Condition (A)$_0$ に現れる T は行列の転置を表わす．

この安定性条件について議論するために，方程式系 (1) を空間変数 x に関して Fourier 変換すると

$$A^0 \hat{u}_t + i|\xi| A(\omega)\hat{u} + L\hat{u} = 0$$

が得られる．ここで，$\xi \in \mathbb{R}^n$ は Fourier 空間上の変数で，$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) = \xi/|\xi| \in S^{n-1}$ と表わし，$A(\omega) = \sum_{j=1}^{n} A^j \omega_j$ と定めた．このとき，初期値問題 (1)-(2) の安定性を得るための条件は次で表わされる．

Condition (K): 各 $\omega \in S^{n-1}$ に対し，次の性質：

$$K(-\omega) = -K(\omega), \qquad (K(\omega)A^0)^T = -K(\omega)A^0$$

$$(K(\omega)A(\omega))_1 > 0 \quad \text{on} \quad \mathrm{Ker}(L)$$

を持つ行列 $K(\omega) \in C^\infty(S^{n-1})$ が存在する．

ここで，任意の行列 X に対して, $X_1 = (X + X^T)/2$，$X_2 = (X - X^T)/2$ と定める．

この Condition (A)$_0$ と (K) の下，初期値問題 (1)-(2) の解は次の性質を示す．

Theorem 1 (Decay property of the standard type ([4, 5])). Condition $(\mathrm{A})_0$ と (K) を仮定する．そのとき，初期値問題 (1)-(2) の解 u の Fourier 像 $\hat{u}$ は次の各点評価を満たす．

$$|\hat{u}(t,\xi)| \le Ce^{-c\rho(\xi)t}|\hat{u}_0(\xi)|. \tag{3}$$

ここで，$\rho(\xi) = |\xi|^2/(1+|\xi|^2)$ である．また更に，$s \ge 0$ に対して $u_0 \in H^s \cap L^1$ を仮定するとき，次の減衰評価が得られる．

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-n/4-k/2}\|u_0\|_{L^1} + Ce^{-ct}\|\partial_x^k u_0\|_{L^2} \quad for \quad k \le s. \tag{4}$$

また，C と c はある正定数である．

Theorem 1 の証明では，緩和行列 L の対称性が非常に重要であるが，近年その対称性を崩す物理モデルが知られてきた．その例が，梁の振動を記述した Timoshenko 系 ([2, 3] 参照) や，プラズマ現象を記述した Euler-Maxwell 方程式系 ([1, 6, 7] 参照) である．これらの方程式系には，論文 [4, 5] によって導かれた安定性条件は適用出来ない．だが，其々の方程式系に対する直接の安定性解析により，徐々にその消散構造が明らかになってきた．よって，本講演では緩和行列 L に対称性を仮定しない方程式系 (1) の消散構造を明らかにし，新たな条件の導入と，その条件下での解の大域挙動について議論するのが目的である．

以下，初期値問題 (1)-(2) に対して次の条件を仮定する．

Condition (A):

$$\begin{aligned}
&(A^j)^T = A^j \quad \text{for} \quad j = 0, 1, \cdots, n, \\
&A^0 > 0, \quad L \ge 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C}^m, \qquad \mathrm{Ker}(L) \ne \{0\}.
\end{aligned}$$

これは，Condition $(\mathrm{A})_0$ から L に対する対称性を省いたものである．この条件の下，新たな条件を 3 つ導入する．

Condition (S): 次の性質：

$$\begin{gathered}
SA^0 = (SA^0)^T, \\
(SL)_1 + L_1 \ge 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C}^m, \qquad \mathrm{Ker}((SL)_1 + L_1) = \mathrm{Ker}(L)
\end{gathered}$$

を持つ定数行列 S が存在する．

Condition $(\mathrm{S})_1$: 各 $\omega \in S^{n-1}$ に対し，Condition (S) で与えられた行列 S が

$$i(SA(\omega))_2 \ge 0 \quad \text{on} \quad \mathrm{Ker}(L_1)$$

を満たす．

Condition $(\mathrm{S})_2$: 各 $\omega \in S^{n-1}$ に対し，Condition (S) で与えられた行列 S が

$$i(SA(\omega))_2 \ge 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C}^m$$

を満たす．

これまでの理論に加えて，これらの新たな条件を用いることで，以下の定理が示される．ひとつめの定理は Condition (S) と $(\mathrm{S})_1$ を用いたものである．

Theorem 2 (Decay property of the regularity-loss type). Condition (A), (S), $(S)_1$, (K) を仮定する．そのとき，初期値問題 (1)-(2) の解 u の Fourier 像 $\hat{u}$ は次の各点評価を満たす．

$$|\hat{u}(t,\xi)| \le Ce^{-c\eta(\xi)t}|\hat{u}_0(\xi)|. \tag{5}$$

ここで $\eta(\xi) = |\xi|^2/(1+|\xi|^2)^2$ である．また更に，$s \ge 0$ に対して $u_0 \in H^s \cap L^1$ を仮定するとき，次の減衰評価が得られる．

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-n/4-k/2}\|u_0\|_{L^1} + C(1+t)^{-\ell/2}\|\partial_x^{k+\ell}u_0\|_{L^2} \quad for \quad k+\ell \le s. \tag{6}$$

ふたつめの定理は，Condition $(S)_1$ をより強い条件である Condition $(S)_2$ に置き換えたものであり，Standard type の減衰評価が導かれている．

Theorem 3 (Decay property of the standard type). Theorem 2 で仮定した Condition $(S)_1$ の代わりに Condition $(S)_2$ を仮定する．そのとき，Theorem 2 の各点評価 (5) と減衰評価 (6) は，Theorem 1 の (3) と (4) に其々改善される．

References

[1] R. Duan, *Global smooth flows for the compressible Euler-Maxwell system: I. Relaxation case*, preprint.

[2] K. Ide, K. Haramoto and S. Kawashima, *Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system*, Math. Models Meth. Appl. Sci., **18** (2008), 647–667.

[3] K. Ide and S. Kawashima, *Decay property of regularity-loss type and nonlinear effects for dissipative Timoshenko system*, Math. Models Meth. Appl. Sci., **18** (2008), 1001–1025.

[4] T. Umeda, S. Kawashima and Y. Shizuta, *On the devay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics*, Japan J. Appl. Math., **1** (1984), 435–457.

[5] Y. Shizuta and S. Kawashima, *Systems of equations of hyperbolic–parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J., **14** (1985), 249–275.

[6] Y. Ueda, S. Wang and S. Kawashima, *Dissipative structure of the regularity-loss type and time asymptotic decay of solutions for the Euler–Maxwell system*, preprint.

[7] Y. Ueda and S. Kawashima, *Decay property of regularity-loss type for the Euler-Maxwell system*, preprint.