Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients and unbounded potentials

水谷　治哉 (京都大学 数理解析研究所 Email: hmizutan@kurims.kyoto-u.ac.jp)

1 Introduction

本講演では漸近的に平坦な計量および遠方における増大度が高々線形程度のポテンシャルを摂動したシュレディンガー方程式の初期値問題を考える：

$$i\partial_t u(t) = Hu(t),\ t \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad d \geq 1. \tag{1.1}$$

ここで, H は以下で定義される変数係数シュレディンガー作用素である：

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} \partial_{x_j} a^{jk}(x)\partial_{x_k} + V(x) \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}^d).$$

$a^{jk}(x)$, $V(x)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな実数値関数で以下を仮定する：

- $(a^{jk}(x))_{j,k}$ は対称行列で, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$C^{-1}\,\mathrm{Id} \leq (a^{jk}(x))_{j,k} \leq C\,\mathrm{Id}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- ある $\mu > 0$ が存在して, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ に対して,

$$|\partial_x^\alpha (a^{jk}(x) - \delta_{jk})| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|}, \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{1-|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

上記の仮定の下で H は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上本質的自己共役になり, その自己共役拡張を再び H と書くと初期値問題 (1.1) の解は $u(t) = e^{-itH}u_0$ で与えられる. ここで e^{-itH} は H が生成する 1-パラメータ強連続ユニタリ群である.

H に対応する古典力学系のハミルトニアンを

$$p(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} a^{jk}(x)\xi_j\xi_k + V(x)$$

と書くことにする. 一般に, 対応するハミルトニアン $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{R})$ が条件：

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}, \quad |\alpha + \beta| \geq 2, \tag{1.2}$$

をみたせば, 発展作用素 e^{-itH} は $|t| \ll 1$ のとき振動積分あるいはフーリエ積分作用素で表せる, 即ち, 初期値問題 (1.1) の基本解 $E(t,x,y)$ は以下のように書けることが, 藤原 (1980), 北田-熊ノ郷 (1981), 谷島 (1991) などによって知られている：

$$\begin{aligned} E(t,x,y) &= (2\pi it)^{-d/2} e^{iS(t,x,y)} a(t,x,y) \\ &= (2\pi)^{-d} \int e^{i(\Psi(t,x,\xi) - y\cdot\xi)} b(t,x,\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

上記の表現公式から, 特に短時間における分散型評価が得られる：

$$|E(t,x,y)| \le C|t|^{-d/2}, \quad x,y \in \mathbb{R}^d,\ 0 < |t| \ll 1.$$

さらに, TT^*-argument (Ginibre-Velo (1985), Keel-Tao (1998)) を用いることで時間局所ストリッカーツ評価が得られる：

$$||e^{-itH}u_0||_{L^p([-T,T];L^q(\mathbb{R}^d))} \le C||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

ここで, (p,q) は以下の 3 条件をみたす実数の組で "admissible pair" と呼ばれる：

$$2 \le p,q \le \infty, \quad 2/p + d/q = d/2, \quad (d,p,q) \ne (2,2,\infty). \tag{1.3}$$

また定数 $C = C(T,p,d) > 0$ は u_0 に依らずにとれる.

一方, 変数係数 ($a^{jk} \ne \text{const.}$) の場合はこの条件 (1.2) をみたさないが, ポテンシャルが長距離型

$$\partial_x^\alpha V(x) = O(\langle x\rangle^{-\nu-|\alpha|}) \quad \text{as } |x| \to +\infty, \quad \nu > 0,$$

であれば超局所的な意味でのパラメトリックス (近似解) の構成, およびそれを用いた時間局所ストリッカーツ評価の証明が知られている (例えば [2, 5, 1, 3, 6] およびその参考文献を参照). しかし, 変数係数かつポテンシャルが非有界な場合には, 今のところパラメトリックスの構成およびストリッカーツ評価に関する結果はないと思われる. ここでは (少なくとも) ポテンシャルの空間遠方における増大度が高々1 次の場合には, それらを証明できることを紹介する.

2 Main result

$\Omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ を開集合とし, シンボルクラス $S(\Omega)$ を以下で定義する:

$$a \in S(\Omega) \Leftrightarrow a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}),\ \operatorname{supp} a \subset \Omega,\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{-|\alpha|}\langle \xi\rangle^{-|\beta|}.$$

$a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ をシンボルに持つ h-擬微分作用素を $a(x,hD)$ と書くことにする:

$$a(x,hD)f(x) = (2\pi h)^{-d}\int e^{i(x-y)\cdot\xi/h} a(x,\xi) f(y) dy d\xi.$$

また, $R > 1$, 開区間 $I \Subset (0,\infty)$ と $\sigma \in (-1,1)$ に対して, エネルギーを局所化した外向き (内向き) 領域 $\Gamma^\pm(R,I,\sigma)$ を以下で定義する:

$$\Gamma^\pm(R,I,\sigma) := \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}; |x| > R,\ |\xi|^2 \in I,\ \pm x\cdot\xi > -\sigma|x||\xi|\}.$$

まずパラメトリックスの構成に関しては以下の定理を得た.

Theorem 1 ([7]). *$T > 0$, $I \Subset (0,\infty)$, $\sigma \in (-1,1)$ を任意に固定する. このとき, ある定数 $R_0 = R_0(T,I,\sigma) \gg 1$ が存在して, 任意の $R \ge R_0$, $a^\pm \in S(\Gamma^\pm(R,I,\sigma))$, $N \ge 0$ 及び $0 < h \ll 1$ に対して, ある $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界作用素 $\mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^\pm(b_h^\pm), \mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^\pm(c_h^\pm), \mathcal{F}_{\mathrm{WKB}}(d_h(t))$ が存在して, (複号同順に) 以下が成り立つ:*

$$\sup_{0 \le \pm t \le Th^{-1}} ||e^{-ithH}a^\pm(x,hD) - \mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^\pm(b_h^\pm)e^{ith\Delta/2}\mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^\pm(c_h^\pm)^* - \mathcal{F}_{\mathrm{WKB}}(d_h(t))||_{L^2\to L^2} \le Ch^N.$$

さらに, $\mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^\pm(b_h^\pm)e^{ith\Delta/2}\mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^\pm(c_h^\pm)^*$ と $\mathcal{F}_{\mathrm{WKB}}(d_h(t))$ の超関数核 $E_{\mathrm{IK}}^\pm(t,x,y)$, $E_{\mathrm{WKB}}(t,x,y)$ は分散型評価をみたす:

$$|E_{\mathrm{IK}}^\pm(t,x,y)| + |E_{\mathrm{WKB}}(t,x,y)| \le C|th|^{-d/2}, \quad 0 < h \ll 1,\ 0 < \pm t \le Th^{-1},\ x,y \in \mathbb{R}^d.$$

ここで, $C = C(T,I,\sigma,N) > 0$ は $R \gg 1$, $0 < h \ll 1$, $0 \le \pm t \le Th^{-1}$ に依存せずにとれる.

Theorem 1から初期値に滑らかさを仮定しない時間局所ストリッカーツ評価が得られる.

Theorem 2 ([7])**.** *(1)* ある $R_0 \gg 1$ と $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\chi_0(x) = 1$ *on* $\{|x| < R_0\}$ が存在して, 任意の $T > 0$ と (1.3) を満たす (p, q), $p > 2$ に対して, 定数 $C = C(T, p, d) > 0$ が存在して,

$$||(1-\chi_0)e^{-itH}u_0||_{L^p([-T,T];L^q(\mathbb{R}^d))} \le C||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(2) さらに, 全ての測地流が非補足的であると仮定すれば全空間での評価が得られる*:*

$$||e^{-itH}u_0||_{L^p([-T,T];L^q(\mathbb{R}^d))} \le C||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Remark 3. (1) $\mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^{\pm}(b_h^{\pm}), \mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^{\pm}(c_h^{\pm})$ は磯崎-北田型の modifier で時間に依らないフーリエ積分作用素である. また, $\mathcal{F}_{\mathrm{WKB}}(d_h(t))$ は WKB 型の時間に依存するフーリエ積分作用素である.
(2) ポテンシャル V が長距離型であれば $\mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^{\pm}(b_h^{\pm})e^{ith\Delta/2}\mathcal{F}_{\mathrm{IK}}^{\pm}(c_h^{\pm})^*$ のみで近似できることが [8, 2] によって示されている. Theorem 1. は彼らの結果のポテンシャルが非有界な場合への拡張である.
(3) Theorem 1 で $t \mapsto th^{-1}$ と変換すれば, e^{-itH} の有限時間での超局所パラメトリックスが得られる.
(4) Theorem 2(2) の証明において, コンパクトな部分 $\chi_0 e^{-itH}$ の評価には局所平滑化作用 [4] を用いる.
(5) Theorem 1 および Theorem 2(1) の証明は漸近的錐型多様体や漸近的双曲多様体の場合にも適用できる.

References

[1] J.- M. Bouclet, *Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds.* Anal. PDE. 4 (2011), 1–84.

[2] J.- M. Bouclet, N. Tzvetkov, *Strichartz estimates for long range perturbations.* Amer. J. Math. **129** (2007), 1565–1609.

[3] N. Burq, C. Guillarmou, A. Hassell, *Strichartz estimates without loss on manifolds with hyperbolic trapped geodesics.* Geom. Funct. Anal. **20** (2010), 627–656.

[4] S. Doi, *Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potentials.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 175–221.

[5] J. Marzuola, J. Metcalfe, D. Tataru, *Strichartz estimates and local smoothing estimates for asymptotically flat Schrödinger equations.* J. Funct. Analysis. **255** (2008), 1497–1553.

[6] H. Mizutani, *Strichartz estimates for Schrödinger equations on scattering manifolds.* To appear in Comm. Partial Differential Equations.

[7] H. Mizutani, *Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients and potentials at most linear at spatial infinity.* Preprint.

[8] D. Robert, *Relative time delay for perturbations of elliptic operators and semiclassical asymptotics.* J. Funct. Analysis **126** (1994), 36–82.