モレー空間と分数べき積分作用素について

澤野嘉宏（京都大学）

概 要

本講演では，モレー空間の基本を説明して，分数べき積分作用素の有界性に関して論じる．また，モレー空間の効用を説明する．モレー空間の解析には,「量的」なアプローチと「質的」なアプローチがあると思われるが，その事情に関しても説明する．

1　基本的な記号一覧

1.1　モレーノルム

$1 \le q \le p < \infty$ とする．このとき，モレーノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_q}$ は

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{x \in \mathbf{R}^n,\, r>0} r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

で与える．

1.2　分数べき積分作用素の定義

分数べき積分作用素は

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy,\, 0 < \alpha < n \tag{2}$$

で与えられる．

1.3　包含関係

ヘルダーの不等式を用いると，$p_0 \ge p_1 \ge p_2 \ge 1$ のときに，

$$L^{p_0} = \mathcal{M}^{p_0}_{p_0} \hookrightarrow \mathcal{M}^{p_0}_{p_1} \hookrightarrow \mathcal{M}^{p_0}_{p_2} \tag{3}$$

を示すことができる．

2　モレー空間に属する関数の例

命題 2.1. $1 \leq q < p < \infty$ のとき，モレー空間 $\mathcal{M}^p_q$ は $|x|^{-n/p}$ を含む.

時間が許せば，モレー空間 $\mathcal{M}^p_q$ は自明な一致が無いことも例を挙げて説明したい.

3　パラメータ p, q の役割

3.1　p の役割

p が大域的な可積分性に相当することを以下の定理を挙げて説明する.

1. Brezis-Gallouët-Wainger の不等式
2. シャープ極大不等式

3.2　q の役割

q が局所可積分性に相当することを例を挙げて説明する.

4　モレー空間の効用

4.1　アダムスの定理

アダムスによる，基本的な定理は以下のとおりである.

定理 4.1.

$$1 < q \leq p < \infty, 1 < t \leq s < \infty, \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, \frac{q}{p} = \frac{t}{s} \tag{4}$$

とすると，I_α を定義している積分は $f \in \mathcal{M}^p_q$ に対してもほとんどいたるところ絶対収束して，I_α は $\mathcal{M}^p_q$ から $\mathcal{M}^s_t$ への非全射有界線形作用素となる．つまり，すべての $Q \in \mathcal{Q}$(立方体全体のなす集合) に対して,

$$|Q|^{1/s}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |I_\alpha f(x)|^t \, dx\right)^{1/t} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}, \quad \frac{1}{t} = \frac{q}{p}\frac{1}{s}, \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n} \tag{5}$$

が成り立つ.

4.2 モレーの補題

$n < p < \infty$ とする．ソボレフの補題 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^{1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ は関数とその勾配がすべて L^p に属せば，その関数は連続で，その連続性に関する情報が得られると主張する．しかし，L^p であることの判定は一般的には困難である．そこで，モレー空間を用いて判定ができることを説明したい．

4.3 シャープ極大不等式

$x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\mathcal{Q}(x)$ を座標軸に辺が平行で，x を含むような立方体全体からなる集合とする．$m_Q(f)$ で，Q 上の関数 f の平均を表す．

$$M^\sharp f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - m_Q(f)| \, dy$$

フェファーマンとスタインとストロンバーグの結果として知られるシャープ極大不等式は

$$\|f\|_{L^p} \simeq \|M^\sharp f\|_{L^p}$$

と表される．ここで，厄介なことは f が L^p に属していることを仮定しないといけないからである．この問題点を回避するために，モレー空間が使えることを説明する．

5 近年におけるモレー空間の解析の方向性

5.1 量的なアプローチ

ここでは，積分可能性を調べるために，測度を一般のラドン測度に置き換える．

5.2 質的なアプローチ

ここでは，関数の滑らかさを詳しく見たいので，再びルベーグ測度空間に戻る．