ヘルムホルツ方程式の外部問題に対する一様リゾルベント評価とその散乱問題への応用

千葉工業大学工学部　中澤秀夫

1. 問題の背景. ヘルムホルツ方程式のリゾルベント評価とは、方程式

$$(1) \qquad \left(-\Delta - \kappa^2\right) u(x) = f(x)$$

に対する不等式

$$(2) \qquad |\kappa|^2 ||u||^2_{X_1} \leqq C_1 ||f||^2_{X_2}$$

をいう。ここで関数空間 X_1, X_2 は通常、重み付き L^2 空間を

$$L^2_w = \{f\,;\,||f||_w < \infty\} \quad ||f||^2_w = \int_\Omega w(x)|f(x)|^2 dx$$

として

$$X_1 = L^2_{(1+r)^{-(1+\delta)}}, \quad X_2 = X_1^* \left(= L^2_{(1+r)^{1+\delta}}\right), \quad (\delta > 0,\ r = |x|)$$

なるものとして特に Schrödinger 方程式の研究で用いられてきた (例えば、池部-斉藤 [3] 1972, J. Math. Kyoto. Univ., Agmon [1] 1975, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa)。方程式 (1) を全空間で考える場合には $\Omega = \mathbb{R}^N$, 外部領域で考える場合には更に Dirichlet 境界条件

$$u(x) = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

を仮す。池部 - 斉藤 や、Agmon 等では (2) における定数 C_1 はスペクトルパラメータ $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に応じて選ばれなければならなかった (局所的なリゾルベント評価) 。その後、望月清 ([12] 1976, RIMS) は、不等式 (2) の定数 C_1 が κ に依存せずに選べる事 (大域的なリゾルベント評価) を $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \neq 2)$ として示し、加藤敏夫による滑らかな摂動の理論 ([7] 1966, Math. Ann.) を用いて摩擦項を伴う波動方程式

$$(3) \qquad w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) + b(x) w_t(x,t) = 0$$

に対して摩擦項の係数関数 $b(x)$ が非負かつ短距離型：

$$0 \leqq b(x) \leqq C_2(1+r)^{-1-\delta} \quad (\text{for some } \delta > 0)$$

という条件のもとで (3) の解の全エネルギー

$$||w(\cdot,t)||^2_E = \frac{1}{2}\left(||\nabla w(\cdot,t)||^2_{L^2} + ||w_t(\cdot,t)||^2_{L^2}\right)$$

が時間の増加とともに 0 に減衰せず、摩擦項のない free な波動方程式の解にエネルギーノルムの意味で漸近する：

$$(4) \qquad ||w(\cdot,t) - {}^{\exists}w_0(\cdot,t)||_E \to 0 \ \text{ as } \ t \to +\infty \quad (w_0(x,t) : \text{free solution})$$

ことを証明した。なお、これと対をなす結果が松村 ([10] 1977, Proc, Japan Acad.) により示されており、摩擦項の係数関数が非負で短距離型でない、即ち

$$C_3(1+r)^{-1} \leqq b(x) \leqq C_4$$

を満たす場合には解の全エネルギーは時間の増加とともに 0 に減衰する、つまり

$$(5) \qquad ||w(\cdot,t)||_E^2 \leqq C_5(1+t)^{-1}$$

を満たす、初期条件の全エネルギーや L^2 ノルムに依る正定数 C_5 が存在する。

2. 問題とその動機. 我々は (4) を波の性質の反映と見たい。この他の様々な波としての性質を考察したい。しかしこれまでに得られている結果は、近年西原氏や池畠氏などによって明らかにされているような (5) に対応する熱方程式に近い性質（これらについては先日の日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会予稿集の池畠氏の内容 [4] を参考のこと) に比してそれほど多くはない。それらを挙げれば、1966 年の溝畑-望月による極限振幅の原理 [11]、1968 年の岩崎による極限振幅の原理の収束の rate [5]、上述の 1976 年の望月による全エネルギーの非減衰及び散乱状態の存在、1996 年の望月-中澤 [14] による外部問題に対する全エネルギーの非減衰及び散乱状態の存在 (1976 年の望月の結果の改良を含むが 2 次元の場合は未証明)、2000 年の中澤による小摂動の枠組みでの極限吸収原理とスペクトル構造の解明 (2 次元の場合は未証明) [15]、2006 年の中澤による 2 次元全空間の散乱状態の存在 [16]、などである。この最後の結果は Agmon ([2] 1990) による Besov 型の関数空間での (1) に対する 2 次元全空間を含む大域的なリゾルベント評価の極めて簡単な応用に過ぎない。いずれにせよ、2 次元外部問題のリゾルベント評価は一つの懸案事項であった。なお、門脇-中澤-渡辺 ([6] 2006, Tokyo Jour. Math.) では特殊な Coulomb 型の摩擦係数に対して解の全エネルギーが時間の増加とともに指数関数的に 0 に減衰する陽な進行波解が求められ、対応するスペクトル構造も明らかにされている。 この結果は波の性質と熱的性質が共存している例で、Majda ([9] 1976, Indiana Univ. Math.) によって証明された消滅解の具体例でもある。

3. 問題の困難点とその解決への糸口. 2 次元外部問題に対するリゾルベント評価が、これまで証明されていなかった原因は、(1) に対してなされるエネルギー不等式導出 (cf. 池部-斉藤 [3]、望月 [12]) の過程において、本質的に $-\Delta$ に起因する項

$$\int_\Omega \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}|u(x)|^2 dx$$

が現れることにある。$N \neq 2$ ならこれは非負として落とせるが、$N = 2$ の場合には真に負となり、これまで (少なくとも講演者には) 評価出来なかった。

これを解決する糸口は近年の 望月清 氏による 2 次元以外の外部領域および全空間における磁場付き Schrödinger 作用素に対する大域的な一様リゾルベント評価 ([13] 2010, RIMS)：

$$(6) \qquad |\kappa|^2||u||_{X_1}^2 + ||u||_{X_3}^2 \leqq C_6||f||_{X_2}^2$$

である。ここで、X_1, X_2 は不等式 (2) におけるのと同様のもの、$X_3 = L^2_{r^{-2}}$ であり、定数 C_6 は κ には依存しない。空間 X_3 は加藤-谷島（[8] 1989, Rev. Math. Phys.）や渡邊 ([20] 1991, Tokyo Jour. Math.) などで主張されているように optimal な空間である。左辺第 2 項が κ に依らないという意味で用語『一様』が使われている。不等式 (7) の証明において望月氏が用いたのは放射条件に関連する Hardy 型の不等式ともいうべきものであるが、これ自身は次元が 2 の場合には成り立たないものであった。

4. 主結果と問題点及び応用. 講演者はこの論文にヒントを得、パラメータを挿入し、更にもう一つ類似の不等式を証明しそれらを二つとも用い、パラメータをうまく選ぶことによって、2 次元外部問題に対する大域的な一様リゾルベント評価を証明することに成功した。これが今回の主結果である ([17])。ただ、望月氏が証明したのとは異なり、2 次元外部領域の場合には不等式 (6) において左辺第 2 項の重み付き空間 X_3 が悪くなり、我々の結果では代わりに $X_4 = L^2_{(1+r)^{-3-\delta}}$ と選ばねばならなくなる。右辺の重みも X_2 ではなく、$X_5 = L^2_{(1+r)^{3+\delta}}$ と悪くなってしまう。なお、この不等式の応用として、2 次元外部問題の摩擦項を伴う波動方程式に対する全エネルギーの非減衰、散乱状態の存在、極限吸収原理が示され、スペクトル構造の解明もなされる。また対応する Schrödinger 方程式に対しても同様の証明法が通用し、望月氏が同じ論文中で述べているような、関連する時間発展の方程式（Schrödinger 方程式、相対論的 Schrödinger 方程式、Klein-Gordon 方程式) に対する平滑化評価式も 2 次元外部領域で導かれる。しかし、残念なことに、上で述べたように不等式 (6) の重み付き空間が若干悪くなるために望月氏が得た様な良い空間での評価ではない。また最近、もう一つの応用として、1966 年の溝畑-望月による極限振幅の原理が、Roach-Zhang([19]) の議論を用いて改良されることも判明した ([18])。

これらの事柄に関して、時間の許す範囲で出来るだけ詳しく説明したい。

References

1. S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Ser. IV, **2** (1975), 151-218.
2. S. Agmon, *A representation theorem for solutions of the Helmholtz equation and resolvent estimates for the Laplacian,*, Analysis, et cetera (P. H. Rabonowitz and E. Zehnder eds.), 1990, pp. 39-76.
3. T. Ikebe and Y. Saito, *Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operators*, J. Math. Kyoto. Univ. **12** (1972), 513-542.
4. R. Ikehata, 空間遠方で臨界減衰する摩擦項を持つ線形波動方程式のエネルギー減衰についての新展開, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会函数方程式論分科会講演アブストラクト (2011), 154-162.
5. N. Iwasaki, *On the principle of limiting amplitude*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **3** (1968), 373-392.
6. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *Exponential decay and spectral structure for wave equation with some Coulomb dissipations*, Tokyo J. of Math. **28** (2005), 463-470.
7. T. Kato, *Wave operators and similality for some non-selfadjoint operators*, Math. Ann. **162** (1966), 258-279.
8. T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing efect*, Reviews in Math. Phys. **1** (1989), 481-496.
9. A. Majda, *Disappearing solution for dissipative wave equation*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1975), 1119-1133.
10. A. Matsumura, *Energy decay of solutions of dissipative wave equations*, Proc. Japan Acad. **53** (1977), 232-236.
11. S. Mizohata and K. Mochizuki, *On the principle of limiting amplitude for dissipative wave equations*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1966), 109-127.
12. K. Mochizuki, *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **12** (1976), 383-390.
13. K. Mochizuki, *Uniform resolvent estimates for magnetic Schrödinger operators and smoothing effects for related evolution equations*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **46** (2010), 741-754.
14. K. Mochizuki and H. Nakazawa, *Energy decay and asymptotic behabior of solutions to the wave equations with linear dissipation*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **32** (1996), 401-414.
15. H. Nakazawa, *The principle of limiting absorption for the non–selfadjoint Schrödinger operator with energy dependent potential*, Tokyo J. Math. **23** (2000), 519-536.
16. H. Nakazawa, *On wave equations with dissipations*, Proceedings of the 4th International conference "Analytical Methods of Analysis and Differential Equations" (AMADE-2006): in three volumes, Vol 3, Differential Equations, Minsk: Institute of Mathematics of NAS of Belarus (2006), 102-110.
17. H. Nakazawa, *Hardy type inequalities related to radiation condition and resolvent estimate for Helmholtz equations in an exterior domain in* $\mathbb{R}^2$, preprint (2011).
18. H. Nakazawa, *The principle of limiting amplitude for dissipative wave equations*, preprint (2011).
19. G. F. Roach and B. Zhang, *The limiting-amplitude principle for the wave propagation problem with two unbounded media*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **112** (1992), 207-223.
20. K. Watanabe, *Smooth perturbations of the self-adjoint operator* $|\Delta|^{\alpha/2}$, Tokyo J. Math. **14** (1991), 239-250.