熊本大学応用解析セミナー 2011/12/10

凸リスク測度と資産価格付けの基本定理

深澤正彰（阪大理）[新井拓児氏（慶大経）との共同研究]

数理ファイナンスにおける資産価格付けの（第一）基本定理は、市場が裁定機会を持たないという条件と、ある特殊な性質を持つ確率測度の存在の同値性を述べるものである。この確率測度は、それによる期待値を使ってすべての商品の市場価格を一斉に設定しなおしても、依然として裁定機会が生まれないようなものとして特徴付けられる。さらにその確率測度を使って、新たに市場に追加される商品の値段を決めれば、その拡大された市場でも無裁定は維持される。

例えば金融機関が新たな金融商品に値を付けて売り出そうというとき、すでに市場で取引される商品の価格と整合的な確率測度を選び、その測度に関する期待値によって売値を決めれば、買い手に裁定機会を与える事態は避けられることになる。これは金融実務においてキャリブレーションと呼ばれている手続きである。とくに追加される商品が既に市場で取引されている商品を組み合わせることで完璧に複製出来るとき、この売値は一意に決まり、この商品を売ることで将来損失を被る確率を 0 にすることが出来る。このような商品の販売は、複製戦略（運用）を代行するサービスの提供と同値である。

一方で売ろうとする商品に複製戦略が存在しないときは、整合的な確率測度は一意に決まらず、適当に選んだ測度による期待値で商品の値段を決めて販売したところで、将来被るかもしれない損失は制御されない。このような商品に対する原理主義的な価格付けは優複製費用を考えることである。市場で費用 0 で購入（契約）できる将来のキャッシュフロー全体の集合を M と書く。例えば X という確率変数が将来のキャッシュフローを表現しており、それが価格 $a(X)$ で購入出来るなら $X - a(X) \in M$ である。新たに値を付けたいキャッシュフロー（確率変数）Y に対して優複製費用 $\rho^0(-Y)$ は

$$\rho^0(-Y) = \inf\{c \in \mathbb{R}; \exists X \in M, c + X - Y \geq 0\}$$

で定義される。定義よりこの優複製費用で販売すれば、優複製戦略が存在するので将来損失を被る確率を 0 に出来る。容易に想像出来るようにこの優複製費用はしばしば大きくなりすぎて実用的ではない。

例： $L = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), p \in [1, \infty)$ として、$Q << P$, $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$ に対して

$$M = \{X - E_Q[X]; X \in L^\infty\} - \{Z \in L; Z \geq 0\}$$

を考える。この市場では任意の L^∞ の元 X が価格 $E_Q[X]$ で買えることになる。定義より M の元はすべて上に有界であるから、任意の上に有界でない Y に対して $\rho^0(-Y) = \infty$ である。この例では $E_Q[\cdot]$ による価格付けで L 全体が無裁定となる。また逆にそのような確率測度は Q しかない。とくに最初から $Q \sim P$ ととる場合には、いわゆる同値マルチンゲール測度が一意に存在することになるが、それでも上に有界でない Y は複製不可能である。定義から ρ^0 は L 上の凸リスク測度になるが、集合 $\{\rho^0 < \infty\}$ は内点を持たない。また Fatou 性も持たない ($Y_n = Y_+ \wedge n$ とすれば $\rho^0(-Y_n) \leq E_Q[Y^n] \leq E_Q[Y_+]$ で $\rho^0(-Y_n) \not\to \rho(-Y_+) = \infty$)。

優複製費用による価格付けをより一般化して、売り手が許容できるレベルまでリスクを下げるために必要な費用を考えるのが Good Deal Bound と呼ばれる枠組である。本報告では Good Deal Bound の枠組での価格付け汎関数を、特殊なクラスの凸リスク測度と捉えて、その特徴付けを行う。

価格付けを考える空間 L として、Orlicz space L^Ψ または Orlicz heart M^Ψ をとる。ここで Ψ は $\Psi(0) = 0$, $\Psi(x) \to \infty (x \to \infty)$ かつ原点 0 で連続な凸偶関数で

$$L^\Psi = \{X; \exists c > 0, E[\Psi(cX)] < \infty\}, \quad M^\Psi = \{X; \forall c > 0, E[\Psi(cX)] < \infty\}.$$

任意に固定した凹効用関数について、期待効用が定義出来る最大の線形空間として、$L = L^{\Psi}$ を意味付けることができる。通常の大小関係とノルム $\|X\| = \inf\{c > 0; E[\Psi(X/c)] \leq 1\}$ で L は Banach lattice になる。上で定義した M は L 内の凸錐で、$\{Z \in L; Z \leq 0\} \subset M$ と仮定する (キャッシュは制約なく捨てることが出来る)。以下の記号を導入する。

$$\Psi^{\dagger}(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - \Psi(x)\},\ \ L^{\dagger} = L^{\Psi^{\dagger}},\ \ \overline{L}^{*} = \{\mu \in L^{*}; \mu \geq 0, \mu(1) = 1, \mu(X) \leq 0, \forall X \in M\},\ \ \boldsymbol{Q} = L^{\dagger} \cap \overline{L}^{*}.$$

（正規化）凸リスク測度 ρ とは L 上の $(-\infty, \infty]$ 値汎関数であって以下の条件を満たすもののことをいう：任意の $X, Y \in L$ と $c \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1]$ に対して

$$(a)\rho(0) = 0,\ \ (b)X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y),\ \ (c)\rho(X + c) = \rho(X) - c,\ \ (d)\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

追加で $\rho(|c|X) = |c|\rho(X)$ も満たすとき、coherent であるという。上から連続のとき Fatou 性を持つという。任意の $Z \geq 0, Z \neq 0$ に対して $\rho(-Z) > 0$ のとき relevant であるという。

命題： 以下は同値：

$$(a)\rho^0 > -\infty,\ \ (b)\rho^0 \text{ は coherent な凸リスク測度},\ \ (c)1 \notin \overline{M}^{s},\ \ (d)\overline{L}^{*} \neq \emptyset$$

ここで $\overline{M}^{s}$ はノルム位相での M の閉包。

凸リスク測度 ρ が Fatou 性を持ち、任意の $X \in L$ に対して $-\rho^0(X) \leq \rho(-X) \leq \rho^0(-X)$ を満たすとき、ρ を Good deal valuation (GDV) と呼ぶ。この不等式は X の売値として $\rho(-X)$ を使ったときに裁定機会が発生しないための条件である。

命題： 以下は同値：

$$(a) \text{ GDV が存在する},\ \ (b)P(X > 0) < 1 \forall X \in M,\ \ (c)1 \notin \overline{M},\ \ (d)\boldsymbol{Q} \neq \emptyset$$

ここで $\overline{M}$ は $\sigma(L, L^{\dagger})$ での M の閉包。

命題： Fatou 性を持つ凸リスク測度 ρ に対して、以下は同値：

$$(a)\rho \text{ は GDV},\ \ (b)\rho(-X) \leq 0 \forall X \in M,\ \ (c)\rho \text{ は risk indifference price},\ \ (d)\rho \text{ は good deal bound.}$$

命題： 以下は同値（元々の市場 M における資産価格付けの第一基本定理）：

$$(a) \text{ relevant な GDV が存在する},\ \ (b)\text{NFL: } \overline{M} \cap L_+ = \{0\},\ \ (c)\boldsymbol{Q}^e \neq \emptyset$$

ここで $L_+ = \{Z \in L; Z \geq 0\}, \boldsymbol{Q}^e = \{Q \in \boldsymbol{Q}; Q \sim P\}$（測度と Radon-Nikodym 微分を同一視する。）

命題： 以下は同値：

$$(a)\rho \text{ は relevant GDV},\ \ (b)(\{Y - \rho(-Y); Y \in L, \rho(-Y) < \infty\} - L_+) \cap L_+ = \{0\}$$

つまり ρ によって拡張された市場が無裁定であるための同値条件は ρ が relevant な GDV であることである。

一方で拡張された市場において基本定理（価格付け測度の存在）は一般に成立しない（反例がある）。この他任意の GDV が relevant になるための条件など議論する。