非線形 **Schrödinger** 方程式の H^s における適切性について

内園 晴典
熊本大学大学院自然科学研究科数学専攻応用数理コース

2012 年 3 月 12 日

自然現象の様々な法則は微分方程式の形に表される．偏微分方程式論において，方程式の適切性は最も基本的かつ重要な問題である．方程式を適当な付帯条件（初期条件・境界条件など）のもとで考えるとき，解が唯一つ存在して，解が与えられたデータに連続的に依存するとき，その問題は適切であるという．方程式の適切性を示すことは，その方程式の現象モデルとしての正当性を保証する上で数学的に大切なステップである．この講演では，非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u + \Delta u = f(u), \tag{1}$$
$$u(x,0) = \phi(x) \tag{2}$$

の適切性について考える．ここで， $u : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{C}, f(u) = c_0|u|^\sigma u, c_0 \in \mathbf{C}, \sigma > 0$ とする．この方程式を積分方程式で表示すると次のようになる：

$$u(t) = e^{it\Delta}\phi + (Gf(u))(t). \tag{3}$$

ただし，

$$(Gg)(t) := -i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta} g(t')dt'. \tag{4}$$

以下では H^s は s 次の Sobolev 空間とする．正確にいうと，次の性質が満たされるとき，Cauchy 問題 (1)-(2) は H^s において適切であるという：

(i) 任意の $\phi \in H^s$ に対して適当な $T > 0$ をとると，(3) の解 $u \in C([0,T],H^s)$ が存在する；
(ii) その解が一意である；
(iii) 解写像 $\phi \mapsto u, H^s \mapsto C([0,T],H^s)$ が連続である．

これまでに [3, 4, 6, 8, 9] 等の様々な論文や，[1, 7] 等多くの文献で (1)-(2) の適切性について論じられてきた．これらの結果によると，
$0 \le s < n/2, \sigma_0(s) < \sigma < 4/(n-2s)$ とするとき，(1)-(2) は H^s において時間局所解を一意に持つ．ただし，

$$\sigma_0(s) = \begin{cases} 0, & 0 \le s < 2, \\ s-2, & 2 \le s < 4, \\ s-3, & s \ge 4. \end{cases}$$

σ に関する条件は [8] に依る．しかし，これらの結果では $\sigma < s-2$ の場合に解の存在が示されていない (図 1 参照)．また $\sigma > [s]+1$ とすると，解写像は局所的に Lipschitz 連続になる [3]．さらに $s = 0,1,2, 0 < \sigma <$

$4/(n-2s)$ のとき，任意の $\phi \in H^s$ に対して解写像が連続であることも知られている（$s=0$ のときは [9]，$s=1$ のときは [4, 6]，$s=2$ のときは [5]）．しかし，その他の場合では解写像の連続性は弱い意味でしか示されていない．すなわち，(γ,ρ) を適当な許容対としたときの $H^s \mapsto C([0,T],L^2) \cap L^\gamma([0,T],L^\rho)$ の連続性のみ示されている．このことは，s 次の Sobolev 空間または Besov 空間において $f(u)$ の Lipschitz 連続性を示すためには $f \in C^{[s]+2}(\mathbf{C},\mathbf{C})$ でなければならないことに起因する．

最近では，Cazenave-Fang-Han [2] が $0<s<1$ における連続性を証明した．そこでこの講演では，$\sigma < s-2$ における解の存在と一意性，$\sigma \leq [s]+1$ における解写像の連続性の証明についてその概略を述べる．主定理は以下の通りである．

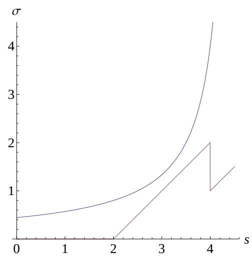

図 1　$n=9$

定理 1. $n \geq 5,\ 2<s<\min\{n/2,4\}, s/2-1<\sigma<4/(n-2s)$ とする．このとき，任意の $\phi \in H^s$ に対して適当な $T>0$ により，*Cauchy* 問題 (1)-(2) は一意解 $u \in C([0,T],H^s)$ をもつ．

定理 2. $n \geq 3,\ 1<s<\min\{n/2,2\}, 0<\sigma<4/(n-2s)$ とする．このとき，(1)-(2) の解写像 $\phi \mapsto u, H^s \mapsto C([0,T],H^s)$ は連続となる．

この証明において難しい点は，f の微分可能性が限られており，s 次の Sobolev/Besov 空間において非線形項とその差が評価できないことである．そこで，空間変数に関する s 次の Besov 空間の代わりに，この空間に対応する，時間に関する $s/2$ 次の Besov 空間を用いる．

参考文献

[1] T. Cazenave *Semilinear Schrödinger Equations*. Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, (2003).

[2] T. Cazenave, D. Fang, Z. Han. *Continuous dependence for NLS in fractional order spaces*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire., Vol.28, (2011), pp. 135-147.

[3] T. Cazenace, F. B. Weissler. *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 14, (1990), pp. 807-836.

[4] J. Ginible, G. Velo. *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case*. J. Funct. Anal. 32 (1979), no. 1, pp.1-32.

[5] T. Kato. *Nonlinear Schrödinger equations*, in "Schrödinger Operators", (H. Holden and A. Jensen Eds.), Lecture Notes in Phys. 345, Springer-Verlag (1989), pp. 218-263.

[6] T. Kato. *On nonlinear Schrödinger equations*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor., Vol.46, (1987), pp. 113-129.

[7] F. Linares, G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Universitext, Springer, (2010).

[8] H. Pecher. *Solutions of semilinear Schrödinger equations in H^s*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor., Vol. 67, (1997), pp. 259-296.

[9] Y. Tsutsumi. *L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*. Funkcial. Ekvac. 30 (1987), no. 1, pp.115-125.