臨界Sobolev空間における対数型Hardyの不等式について

町原秀二 (埼玉大学), 小澤徹 (早稲田大学), 和田出秀光 (岐阜大学)

Sobolev-Lorentz 空間 $H^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, は Bessel 核及び Lorentz 空間 $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を用いて $H^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := (1-\Delta)^{-\frac{s}{2}} L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ と定義される. 臨界 Sobolev-Lorentz 空間 $H^{\frac{n}{p_1}}_{p_1,p_2}(\mathbb{R}^n)$ に対応する Sobolev 定理として次が成立する:

$$H^{\frac{n}{p_1}}_{p_1,p_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{q_1,q_2}(\mathbb{R}^n), \quad q_1 \in [p_1, \infty), \quad q_2 \in [p_2, \infty].$$

しかし, $q_1 = \infty$ 及び $(p_2, q_2) \neq (1, \infty)$ のとき, 上記の包含関係は破綻する. このことは, 臨界 Sobolev-Lorentz 空間 $H^{\frac{n}{p_1}}_{p_1,p_2}(\mathbb{R}^n)$ に属する関数が局所的特異性を持ち得ることを意味する. 実際, 対数型局所的特異性を持つ関数として $H^{\frac{n}{p_1}}_{p_1,p_2}(\mathbb{R}^n)$ に属する関数を構築することができる (参考文献 Edmunds-Triebel [5], Nagayasu-Wadade [13]). これらの特異性に起因し, 対応する通常の斉次重み付き Hardy の不等式は成立しない. しかし, Edmunds-Triebel [5] において, 対数関数を補助関数として次の非斉次対数型重み付き Hardy の不等式が示された:

Theorem A (Edmunds-Triebel [5, Theorem 2.8]). *$n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ とする. このとき, 正定数 C が存在して不等式*

$$\left(\int_{\{|x| < \frac{1}{2}\}} \left(\frac{|u(x)|}{|\log |x||} \right)^p \frac{dx}{|x|^n} \right)^{\frac{1}{p}} \le C \|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_p} \tag{1}$$

が任意の $u \in H^{\frac{n}{p}}_p(\mathbb{R}^n)$ に対して成立する.

我々の主目的は, 不等式 (1) を次の 2 つの意味において拡張することである. 1 つは, 関数空間の一般化, 即ち, 通常の Sobolev 空間 $H^{\frac{n}{p}}_p(\mathbb{R}^n)$ の拡張である Sobolev-Lorentz 空間 $H^{\frac{n}{p_1}}_{p_1,p_2}(\mathbb{R}^n)$ において, 不等式 (1) に対応する不等式を構築することである. また, 2 つ目の拡張として, 不等式の左辺に表れる指数の取り方に自由度を与え, 具体的に, 不等式 (1) が成立するための指数に対する必要十分条件を考察する. 結果, 我々は次の定理を得た:

Theorem. *$n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$, $1 < \alpha, \beta < \infty$ とする. このとき, 正定数 C が存在して不等式*

$$\left(\int_{\{|x| < \frac{1}{2}\}} \frac{|u(x)|^\alpha}{|\log |x||^\beta} \frac{dx}{|x|^n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \le C \|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}} \tag{2}$$

が任意の $u \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ に対して成立するための必要十分条件は次の条件 *(i),(ii),(iii)* のいずれか *1* つが成立することである *:*

$$\begin{cases} (i) \quad 1+\alpha-\beta<0\,; \\ (ii) \quad 1+\alpha-\beta \geq 0 \;\; and \;\; q<\dfrac{\alpha}{1+\alpha-\beta}\,; \\ (iii) \quad 1+\alpha-\beta>0, \quad q=\dfrac{\alpha}{1+\alpha-\beta} \;\; and \;\; \alpha \geq \beta. \end{cases}$$

定理において特に, $p=q=\alpha=\beta$ と置くと, 不等式 (2) は不等式 (1) に一致する．また, 指数 $q=\dfrac{\alpha}{1+\alpha-\beta}$ は不等式 (2) が成立または不成立であるための臨界指数であることが分かる．さらに, 定理により, $q=\dfrac{\alpha}{1+\alpha-\beta}$ のとき, $\alpha \geq \beta$ であれば (2) は成立, $\alpha<\beta$ であれば (2) は不成立であることが確認される．特に, $q=\infty$ 及び $1+\alpha-\beta=0$ のとき, 対応する Sobolev-Lorentz 空間 $H^{\frac{n}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ は弱臨界 Sobolev 空間に一致することが知られているが, このとき (2) は成立しない.

Hardy 型不等式及びその応用に関しては数多くの研究論文があるが, 特に, Adimurthi-Chaudhuri-Ramaswamy [1], Beckner [2], Bradley [3], Brézis-Marcus [4], Edmunds-Triebel [5], García-Peral [6], Gurka-Opic [7], Herbst [8], Kalf-Walter [9], Ladyzhenskaya [10], Machihara-Ozawa-Wadade [11], Matsumura-Yamagata [12], Nagayasu-Wadade [13], Ozawa-Sasaki [14], Pick [15], Reed-Simon [16], Triebel [17] and Zhang [18] らを参考文献に挙げたい．中でも Bradley [3], Edmunds-Triebel [5] においては, 不等式 (2) に類似する不等式を Besov 型空間において研究されている.

References

[1] Adimurthi, N. Chaudhuri and M. Ramaswamy, *An improved Hardy-Sobolev inequality and its application*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 489–505.

[2] W. Beckner, *Pitt's inequality with sharp convolution estimates*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 1871–1885.

[3] J. S. Bradley, *Hardy inequalities with mixed norms*, Canad. Math. Bull. **21** (1978), 405–408.

[4] H. Brézis and M. Marcus, *Hardy's inequalities revisited*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **25** (1997), 217–237.

[5] D. E. Edmunds and H. Triebel, *Sharp Sobolev embeddings and related Hardy inequalities : the critical case*, Math. Nachr. **207** (1999), 79–92.

[6] J. P. A. García and I. A. Peral, *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems*, J. Differential Equations **144** (1998), 441–476.

[7] P. Gurka and B. Opic, *Sharp embeddings of Besov-type spaces*, J. Comput. Appl. Math. **208** (2007), 235–269.

[8] W. I. Herbst, *Spectral theory of the operator* $(p^2+m^2)^{1/2} - Ze^2/r$, Comm. Math. Phys. **53** (1977), 285–294.

[9] H. Kalf and J. Walter, *Strongly singular potentials and essential self-adjointness of singular elliptic operators in* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, J. Funct. Anal. **10** (1972), 114–130.

[10] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol.2, Gordon and Breach Science Publishers (1969).

[11] S. Machihara, T. Ozawa and H. Wadade, *Hardy type inequalities on balls*, preprint.

[12] A. Matsumura and N. Yamagata, *Global weak solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow subject to large external potential forces*, Osaka J. Math. **38** (2001), 399–418.

[13] S. Nagayasu and H. Wadade, *Characterization of the critical Sobolev space on the optimal singularity at the origin*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 3725–3757.

[14] T. Ozawa and H. Sasaki, *Inequalities associated with dilations*, Commun. Contemp. Math. **11** (2009), 265–277.

[15] L. Pick, *Optimal Sobolev embeddings*, Nonlinear analysis, function spaces and applications, Vol. 6 (Prague, 1998) Acad. Sci. Czech Repub. (1999), 156–199.

[16] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers] (1975).

[17] H. Triebel, *Sharp Sobolev embeddings and related Hardy inequalities : the sub-critical case*, Math. Nachr. **208** (1999), 167–178.

[18] J. Zhang, *Extensions of Hardy inequality*, J. Inequal. Appl. (2006), Art. ID 69379, 5 pp.