Time periodic solutions to the Navier-Stokes equations in the rotational framework

高田 了（京都大学 大学院理学研究科）

3 次元全空間 $\mathbb{R}^3$ および時間全区間 $\mathbb{R}$ において，次の Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式の時間周期問題を考察する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{div} u = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{NSC}$$

ここで，$u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), u^3(x,t))$ および $p = p(x,t)$ はそれぞれ流体の速度場と圧力を表す未知関数であり，$f = f(x,t) = (f^1(x,t), f^2(x,t), f^3(x,t))$ は与えられた時間周期的外力である．また，$\Omega \in \mathbb{R}$ は軸 $e_3 = (0,0,1)$ の周りでの回転の角周波数に対応した定数である．$\Omega = 0$ の場合が通常の Navier-Stokes 方程式となる．

本講演では，時間周期的外力 f に対する (NSC) の時間周期解の存在と一意性について考察する．特に，通常の Navier-Stokes 方程式 $(\Omega = 0)$ と比較した場合に，回転の影響によって外力項 f に対する仮定が弱められることを示す．本講演では，Kozono-Nakao [2] に従い，次の積分方程式を満たす解について考察する．

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\Omega(t-s)\mathbb{P}f(s)ds - \int_{-\infty}^{t} T_\Omega(t-s)\mathbb{P}\left[(u(s)\cdot\nabla)u(s)\right]ds \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{IE}$$

ここで，$\mathbb{P} := (\delta_{ij} + R_i R_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ は Helmholtz 射影作用素であり，$\{T_\Omega(t)\}_{t \geqslant 0}$ は次で与えられる (NSC) の線形方程式に対応した半群である (Hieber-Shibata [1]).

$$T_\Omega(t)f = \mathscr{F}^{-1}\left[\cos\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)e^{-|\xi|^2 t}\widehat{f}(\xi) + \sin\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)e^{-|\xi|^2 t}R(\xi)\widehat{f}(\xi)\right].$$

また，$\{R_i\}_{i=1}^3$ は Riesz 変換を表し，$R(\xi)$ は次で定義される歪対称行列である．

$$R(\xi) := \frac{1}{|\xi|}\begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

積分方程式 (IE) を考察するに当たり，問題となるのが積分区間 $(-\infty, t)$ における時間積分の収束性である．通常の Navier-Stokes 方程式 $(\Omega = 0)$ を一般次元 $\mathbb{R}^n$ において考察した場合，空間次元 n が高いほど熱半群 $e^{t\Delta}$ の時間減衰が速くなるため，時間無限遠での可積分性が得やすくなる．Kozono-Nakao [2], Yamazaki [3] [4] においては，$n \geqslant 4$ の場合，ある $1 < p, l < \infty$ に対して $f \in BC(\mathbb{R}; L^p(\mathbb{R}^n)) \cap BC(\mathbb{R}; L^l(\mathbb{R}^n))$ という仮定の下，Navier-Stokes 方程式の時間周期解の存在が示されている．しかし，$n = 3$ の場合，時間無限遠での可積分性を得るために，$f \in BC(\mathbb{R}; L^l(\mathbb{R}^n))$ かつ，ある $F = \{F_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ に対して $f = \operatorname{div} F$ という仮定が必要となる．また，全ての空間次元において，外力項に対する小ささの仮定が必要である．

本講演では，空間 3 次元において Coriolis 力の影響が働く場合 $(\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ に，外力項に対する $f = \operatorname{div} F$ という仮定が不要であること，更に，回転速度 $|\Omega|$ が十分大きい場合に，外力項に対する小ささの仮定が不要であることを示す．

主結果を述べるにあたり，いくつかの記号を導入する．$C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ は $\mathbb{R}^3$ 上で定義されたコンパクトな台をもつ C^{∞} 級ベクトル値関数 $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ であって，$\operatorname{div} \phi = 0$ を満たすもの全体の集合とする．$1 < r < \infty$ に対し，$L_{\sigma}^r(\mathbb{R}^3)$ を $C_{0,\sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ の $L^r(\mathbb{R}^3)$-ノルム $\|\cdot\|_{L^r}$ による完備化とする．また一般の Banach 空間 X に対して，$BC(\mathbb{R}; X)$ を X に値をとる $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数全体からなる集合とする．

定理 1. 指数 r, q, p, l は次を満たすとする．

$$\frac{5}{2} < r < 3, \quad 2 < q \leqslant \frac{12}{5}, \quad \frac{1}{3} + \frac{5}{3r} < \frac{1}{p} < 1, \quad \frac{5}{3q} < \frac{1}{l} < \frac{1}{q} + \frac{1}{3}. \tag{1}$$

このとき，ある正定数 $C = C(r, q, p, l), K = K(r, q, p, l)$ が存在して，任意の $\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ と任意の時間周期的外力 $f \in BC(\mathbb{R}; L^p(\mathbb{R}^3)) \cap BC(\mathbb{R}; L^l(\mathbb{R}^3))$ で

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{L^p} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{L^l} \leqslant C \min \left\{ |\Omega|^{1 + \frac{3}{2r} - \frac{3}{2p}}, |\Omega|^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2q} - \frac{3}{2l}} \right\} \tag{2}$$

を満たすものに対し，外力 f と同じ周期をもつ (NSC) の時間周期解 $u \in X_K$ が一意に存在する．ここで，

$$X_K := \left\{ u \in BC(\mathbb{R}; L_{\sigma}^r(\mathbb{R}^3)) \cap BC(\mathbb{R}; \dot{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)) \;\middle|\; \|u\|_X \leqslant K \right\}$$

であり，そのノルムは次で定義される．

$$\|u\|_X := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{L^r} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\nabla u(t)\|_{L^q}.$$

注意 2. 指数 (r, q, p, l) に対する仮定 (1) より，外力項 f に対する大きさの制限 (2) における $|\Omega|$ の冪は正となる．従って，任意の $f \in BC(\mathbb{R}; L^p(\mathbb{R}^3)) \cap BC(\mathbb{R}; L^l(\mathbb{R}^3))$ に対して，回転速度 $\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を十分大きく取れば，(NSC) は一意的な時間周期解 $u \in X_K$ をもつことが従う．

定理 1 の証明においては，半群 $T_{\Omega}(t)$ に対する線形評価が重要となる．特に，回転による振動項に対応した作用素

$$\mathscr{G}_{\pm}(\tau)[f](x) := \mathscr{F}^{-1}\left[e^{\pm i\tau \frac{\xi_3}{|\xi|}} \mathscr{F}[f] \right](x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{\pm i\tau \frac{\xi_3}{|\xi|} + ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tau \in \mathbb{R}$$

に対する分散型評価を導出することが証明の鍵となる．振動項 $\mathscr{G}_{\pm}(\Omega t)$ に対する分散型評価および熱半群 $e^{t\Delta}$ による平滑化効果を用いることにより，一般の外力 f に対して，積分方程式 (IE) の右辺第一項における時間積分の収束を示す．

尚，本講演の内容は，中央大学の岩渕司氏との共同研究に基づくものである．

参考文献

[1] M. Hieber and Y. Shibata, *The Fujita-Kato approach to the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Math. Z. **265** (2010), 481–491.

[2] H. Kozono and M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), 33–50.

[3] M. Yamazaki, *The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force*, Math. Ann. **317** (2000), 635–675.

[4] ———, *Solutions in the Morrey spaces of the Navier-Stokes equation with time-dependent external force*, Funkcial. Ekvac. **43** (2000), 419–460.