Order estimates of splitting methods for semilinear evolution equations

太田 雅人（東京理科大学 理学部数学科）

X を Hlibert 空間, A を m-dissipative operator in X とし, 初期値問題

$$
\text{(CP)} \quad \begin{cases} \partial_t u = Au + F(u), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}
$$

を考える. ここで, $F : D(A) \to D(A)$ は次をみたすとする.

(F0) $F(0) = 0$.

(F1) $\|F'(v)w\|_{D(A)} \le L(\|v\|_{D(A)})\|w\|_{D(A)}$ $\forall v,\, w \in D(A)$.

(F2) $\|F(v)\|_{D(A^2)} \le L_2(\|v\|_{D(A)})\|v\|_{D(A^2)}$, $\forall v \in D(A^2)$.

(F3) $\|F(v) - F(w)\|_{D(A^2)} \le L_3(\|v\|_{D(A^2)} \vee \|w\|_{D(A^2)})\|v - w\|_{D(A^2)}$, $\forall v,\, w \in D(A^2)$.

(F4) $\|F'(v)w\|_X \le L_4(\|v\|_{D(A)})\|w\|_X$, $\forall v,\, w \in D(A)$.

(F5) $\|F''(v)(w, w)\|_X \le L_5(\|v\|_{D(A)})\|w\|_{D(A)}\|w\|_X$, $\forall v,\, w \in D(A)$.

ここで, $L,\, L_2, ..., L_5 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は非減少関数である.

注意 1 (F0), (F1) より, 次が成り立つ.

(F6) $\|F(v) - F(w)\|_{D(A)} \le L(\|v\|_{D(A)} \vee \|w\|_{D(A)})\|v - w\|_{D(A)}$, $\forall v,\, w \in D(A)$.

(F7) $\|F(v)\|_{D(A)} \le L(\|v\|_{D(A)})\|v\|_{D(A)}$, $\forall v \in D(A)$.

例 2（非線形 Schrödinger 方程式） $X = L^2(\mathbb{R}^N)$, $D(A) = H^2(\mathbb{R}^N)$, $Au = i\Delta u$, $F(u) = i\alpha|u|^{2\sigma}u$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると, $N \le 3$ のとき, (F0)–(F5) が成り立つ.

次はよく知られている (たとえば, [2], Section 4.3 参照).

命題 3 (F0), (F1) を仮定する. このとき, 任意の $u_0 \in D(A)$ に対して, 次をみたす $T_{\max}(u_0) \in (0, \infty]$, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)), D(A))$ が存在する. 任意の $T \in (0, T_{\max}(u_0))$ に対して, u は (CP) の一意解であり, 次のどちらかが成り立つ.

(i) $T_{\max}(u_0) = \infty$, (ii) $T_{\max}(u_0) < \infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T_{\max}(u_0)} \|u(t)\|_{D(A)} = \infty$.

さらに, $u_0 \in D(A^2)$ ならば, $u \in C([0, T_{\max}(u_0)), D(A^2)) \cap C^1([0, T_{\max}(u_0)), D(A))$.

$u_0 \in D(A)$ に対して, (CP) の解を $u(t) = S^t u_0$ とかく. また, A によって生成される縮小半群を Φ_A^t で表し, $w_0 \in D(A)$ に対して, 初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t w = F(w), & t \in [0,T], \\ w(0) = w_0 \in D(A) \end{cases}$$

の解を $w(t) = \Phi_F^t w_0$ とかく. さらに, $\Psi^t v_0 = \Phi_A^{t/2} \Phi_F^t \Phi_A^{t/2} v_0$ と定める.

定理 4　(F0)–(F5) を仮定する. $u_0 \in D(A^2)$, $T \in (0, T_{\max}(u_0))$ とし

$$m_0 := \max_{t \in [0,T]} \|S^t u_0\|_{D(A)}$$

とおく. このとき, T, m_0, $\|u_0\|_{D(A^2)}$ のみに依存する正定数 h_0 が存在して, 任意の $h \in (0, h_0]$ 及び $nh \le T$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\|(\Psi^h)^n u_0\|_{D(A)} \le 2m_0, \quad \|(\Psi^h)^n u_0\|_{D(A^2)} \le e^{\gamma_1 nh} \|u_0\|_{D(A^2)}, \\ &\|S^{nh} u_0 - (\Psi^h)^n u_0\|_{D(A)} \le \kappa_1 h \|u_0\|_{D(A^2)}, \\ &\|S^{nh} u_0 - (\Psi^h)^n u_0\|_X \le \kappa_2 h^2 \|u_0\|_{D(A^2)}. \end{aligned}$$

ここで, γ_1 は m_0 のみに, κ_1, κ_2 は T, m_0 のみに依存する正定数である.

注意 5　上の定理 4 は非線形 Schrödinger 方程式に対する splitting method の誤差評価を考察した論文 [1, 4] を抽象化・一般化したものである. また, 証明の要である $\|(\Psi^h)^n u_0\|_{D(A)}$ の一様評価に関しては, KdV 方程式などを考察した最近の論文 [3] を参考にした.

参考文献

[1] C. Besse, B. Bidégaray and S. Descombes, Order estimates in time of splitting methods for the nonlinear Schrödinger equation, SIAM J. Numer. Anal. **40** (2002), 26–40.

[2] T. Cazenave and A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[3] H. Holden, C. Lubich and N. H. Risebro, Operator splitting for partial differential equations with Burgers nonlinearity, preprint, arXiv:1102.4218.

[4] C. Lubich, On splitting methods for Schrödinger-Poisson and cubic nonlinear Schrödinger equations, Math. Comp. **77** (2008), 2141–2153.