Higher order expansion of solutions for the isothermal Falk-Konopka system of shape memory alloys

吉川周二 (愛媛大学 理工学研究科 (工))

形状記憶合金は, 常温下で変形をさせてもお湯をかけるなどして温度を上げると元の形状に復元する性質をもった物質である. この形状記憶の効果は合金の格子構造の相転移によって生じることが知られている. 形状記憶合金の数理モデルには多くのモデルが知られているが, 古典的なものとして Falk モデルがある. このモデルは, 歪みを秩序変数として Ginzburg-Landau 理論を適用し形状記憶合金の相転移現象を表現した 1 次元モデルである. この Falk モデルを 3 次元に拡張した Falk-Konopka モデルにおいて, 等温の条件下で弱い摩擦項を付与した方程式について考察したい. ただし, 本講演では簡単のため, この方程式を単純化した次のモデルを用いて説明をする.

$$(FK)\begin{cases}\partial_t^2 u+\partial_t u-a\Delta u+b\Delta^2 u=\nabla\cdot r(\nabla u), & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3\\ u(0,\cdot)=u_0,\quad \partial_t u(0,\cdot)=v_0, & \text{in } \mathbb{R}^3\end{cases}$$

ここで, $r=(r_1,r_2,r_3)$ の各成分は $\nabla u=(\partial_1 u,\partial_2 u,\partial_3 u)$ についての 2 次以上の任意の多項式であるとする. また a と b は正定数である.

研究目的は, 方程式の解の時間無限大での挙動を調べることである. まず, 小さな初期値に対して以下のような解が存在することを示す.

定理 1. 十分小さい初期値 $(u_0,v_0)\in L^1\cap H^4\times L^1\cap H^2$ の仮定のもとで, 以下を満たす *(FK)* の時間大域的に穏やかな解 $u\in C([0,\infty);H^4)$ がただ一つ存在する,

$$\|u(t)\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}},\qquad \|\Delta^2 u(t)\|_{L^2}\le C(1+t)^{-\frac{3}{4}-2},\quad t\ge 0. \tag{1}$$

上の定理より, 時間が大きくなると解が減衰することがわかる. ここでは, 解の漸近形を求めることによって, より詳しくどのように減衰するのかを調べたい. 例えば, 消散型波動方程式の場合, 解の漸近形はガウス核が漸近形となることが知られている. 我々の方程式 (FK) の場合は, 何が解の挙動をあらわす主要項になり, また各項が解にどのように影響を与えているのかを, 漸近形を求めることで調べてみたい. 主結果は以下の 3 つの定理である.

定理 2 (漸近形 I)**.** 定理 *1* の仮定の下で *(FK)* の解 $u(t)$ は次を満たす.

$$\|u(t)-G_0(t,\cdot)m_0\|_{L^q}=o\left(t^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)}\right),\quad \text{as}\quad t\to\infty,\quad 2\le q\le\infty,$$

ただし $\quad m_0=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}(u_0(y)+v_0(y))\,dy,\quad G_0(t,x)=\frac{1}{(4\pi at)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4at}\right).$

定理 2 では, 非線形部分の減衰が速いため非線形の効果は漸近形にあらわれない. 次の定理ではより詳しく 2 次の漸近形を求める. 2 次の漸近形まで考えることで非線形の効果が確認できる.

定理 3 (漸近形 II)**.** 定理 *1* の仮定に加えて $|x|u_0,\ |x|v_0 \in L^1$ を仮定する. この時, 定理 *1* で得られる解 $u(t)$ はさらに次を満たす.

$$\begin{aligned}\left\|u(t) - G_0(t,\cdot)m_0 - \nabla G_0(t)\cdot(m_1+n_0)\right\|_{L^q}\\ = o\left(t^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}}\right), \quad \text{as} \quad t\to\infty, \quad 2\le q\le\infty,\end{aligned}$$

ただし, $m_1 = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} y\left(u_0(y)+v_0(y)\right)dy, \quad n_0 = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3} r(\nabla u(s,y))dy\,ds.$

G_0 は a のみで定まるため, 漸近形 I と漸近形 II には, 本質的に $a\Delta u$ の項の効果しかあらわれていない. さらに 3 次の漸近形まで考察すると, $b\Delta^2 u$ の項の効果があらわれることを確認できる.

定理 4 (漸近形 III)**.** 定理 *1* の仮定に加えて, $|x|^2u_0, |x|^2v_0 \in L^1$ を仮定する. この時, (FK) の解 $u(t)$ は次を満たす.

$$\begin{aligned}\Big\|u(t) - G_0(t,\cdot)m_0 - \nabla G_0(t)\cdot(m_1+n_0) - G_2(t)\widetilde{m}_0 - tG_4(t)m_0\\ - \nabla\nabla G_0(t)(m_2+n_1)\Big\|_{L^q} = o\left(t^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)-1}\right), \quad \text{as} \quad t\to\infty, \quad 2\le q\le\infty,\end{aligned}$$

ただし $\widetilde{m}_0 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}u_0(y)+v_0(y)\right)dy, \quad m_2 = \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} y_jy_k\left(u_0(y)+v_0(y)\right)dy\right)_{j,k=1,2,3},$

$n_1 = \left(-\displaystyle\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3} y_kr_j(\nabla u(s,y))dy\,ds\right)_{j,k=1,2,3}, \quad G_2 = 2a\Delta G_0, \quad G_4 = (a^2+b)\Delta^2 G_0.$

ここでは見通しをよくするために簡略化した方程式 (FK) について考察したが, 勿論これらの議論は連立系であるもとの等温 Falk-Konopka モデルに対しても適用が可能である.

本講演内容は竹田寛志氏 (福岡工業大学) との共同研究 [1] に基づくものである.

参考文献

[1] H. Takeda and S. Yoshikawa, Asymptotic profiles for the solution of the isothermal Falk-Konopka system of shape memory alloys with weak damping, to appear in Asymptotic Analysis.