p-放物型方程式の解の超縮小性と対数型ソボレフの不等式

藤田　安啓
富山大学 理工学研究部

この講演では, p-放物型方程式の解の超縮小性と対数型ソボレフの不等式の同値性について考える.

以下, $p > 2$, $n \in \mathbb{N}$ とする. $\mathbb{R}^n$ 上の十分滑らかな函数 $f \geq 0$ に対して, f の (Lebesgue 測度に関する）エントロピーを

$$\mathrm{Ent}(f) = \int f \log f dx - \int f dx \ \log \int f dx \tag{1}$$

で定義する. 本講演を通して, 定義域を明示しない積分は $\mathbb{R}^n$ 上で考えているものとする. Gentil [13, Theorem 1.1] が与えた対数型 Sobolev の不等式は以下のものである：

$$\mathrm{Ent}(|f|^p) \leq \frac{n}{p} \int |f|^p dx \ \log \left(L_p \ \frac{\displaystyle\int |Df|^p \, dx}{\displaystyle\int |f|^p \, dx} \right), \quad f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

ただし,

$$L_p = \frac{p}{n} \left(\frac{p-1}{e} \right)^{p-1} \pi^{-p/2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\,\frac{p-1}{p}+1\right)} \right)^{p/n} \tag{3}$$

であり, また, この L_p は不等式 (2) における最良定数である. なお, 不等式 (2) は Hamilton-Jacobi 方程式などを使って導くことができる.

次に, p-放物型方程式に対する Cauchy 問題

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_p u(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4}$$

を考える. ただし,

$$\Delta_p v = \mathrm{div}(|Dv|^{p-2} Dv)$$

であり, 初期値 u_0 は仮定

$$0 \leq u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad \sup_{s \geq r} \left[s^{-\left(n + \frac{p}{p-2}\right)} \int_{|x| \leq s} u_0(x)\, dx \right] < \infty, \quad r > 0 \tag{5}$$

熊本大学応用解析セミナー, 2012.11.10.

を充たすとする．このとき, [7] より, ある $T^* \in (0,\infty]$ が存在して, Cauchy 問題 (4) は $\mathbb{R}^n \times (0,T^*)$ 上で唯一つの弱解を持つことが知られている. 以下, $f \in L^\gamma(\mathbb{R}^n)$ $(\gamma > 0)$ に対して,

$$\|f\|_\gamma = \left(\int |f(x)|^\gamma dx\right)^{1/\gamma}$$

とおく.

Theorem 1. *不等式 (2) が成立するとする. また, u_0 は (5) を充たし, ある $\alpha > 0$ に対して, $e^{-u_0} \in L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ となるとする. このとき, すべての $\beta \in (\alpha,\infty)$ と $t \in (0,T^*)$ に対して, $e^{-u(\cdot,t)} \in L^\beta(\mathbb{R}^n)$ であり, 不等式*

$$\|e^{-u(\cdot,t)}\|_\beta \le \|e^{-u_0}\|_\alpha \left(\frac{nL_p e^{p-2}}{p^{p+1}t}\ \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\right)^{\frac{n}{p}\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} \left(\frac{\beta^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{-\frac{n(p-1)}{p}} \tag{6}$$

が成立する.

次の条件を考える：

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上で非負かつ Lipschitz 連続で, ある } \theta \in (0,1] \\ \text{に対して } Du_0 \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ 上で局所 } \theta\text{-Hölder 連続である.} \end{array}\right. \tag{7}$$

このとき, (7) なら (5) が成立することに注意しよう.

Theorem 2. *$\alpha > 0$, $t_0 > 0$ とする. 不等式 (6) が, $e^{-u_0} \in L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ かつ (7) を充たす u_0 と, $\beta \in (\alpha,\infty)$ および $t \in (0,t_0)$ に対して成立するとする. このとき, 不等式 (2) が成立する.*

References

[1] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations, Birkhäuser, Boston, 1997.

[2] S. G. Bobkov, I. Gentil and M. Ledoux, *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. 80 (2001), pp. 669–696.

[3] P. Cannarsa and C. Sinestrari, Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 2004.

[4] M. Del Pino and J. Dolbeault, *Nonlinear diffusions and optimal constants in Sobolev type inequality: asymptotic behaviour of equations involving the p-Laplacian*, C.R.Acad. Sci. Paris, Ser I 334 (2002) pp.365–370.

[5] M. Del Pino and J. Dolbeault, *The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality*, J. Funct. Anal. 197 (2003) pp.151–161.

[6] M. Del Pino, J. Dolbeault and I. Gentil, *Nonlinear diffusions, hypercontractivity and the optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality*, J. Math. Anal. Appl. 293 (2004), pp.375–388.

[7] E. DiBenedetto, Degenerate parabolic equations, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993

[8] E. DiBenedetto, *On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 13 (1986), pp.487–535

[9] E. DiBenedetto and M. A. Herrero, *On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 314 (1989), pp.187–224.

[10] L. Evans, Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[11] Y. Fujita, *An optimal logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constants*, Journal of Functional Analysis 261 (2011) pp.1133–1144.

[12] I. Gentil, *Ultracontractive bounds on Hamilton—Jacobi equations*, Bull. Sci. Math. 126 (2002), pp. 507–524.

[13] I. Gentil, *The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations*, J. Funct. Anal. 202 (2003) pp. 591–599.

[14] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975) pp. 1061–1083.

[15] P. Juutinen, P. Lindqvist and J. . Manfredi, *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation* , SIAM J. Math. Anal. 33 (2001), pp.699–717.

[16] K. Lee, A. Petrosyan and J-L. Vázquez, *Large-time geometric properties of solutions of the evolution p-Laplacian equation*, J. Differential Equations 229 (2006) pp. 389-411.

[17] G. M. Lieberman, *Initial regularity for solutions of degenerate parabolic equations*, Nonlinear Anal. 6 (1997), 525–536.

[18] P. Lindqvist and J. J. Manfredi, *Viscosity supersolutions of the evolutionary p–Laplace equation.* Differential Integral Equations 20 (2007), 1303–1319.

[19] M. Ohnuma, *Some remarks on singular degenerate parabolic equations including the p-Laplace diffusion equation.* Progress in partial differential equations, Vol. 2 (Pont-á-Mousson, 1997), 54–65, Pitman Res. Notes Math. Ser., 384, Longman, Harlow, 1998.

[20] M. Ohnuma, *On a comparison principle for singular degenerate parabolic equations with a 0-th order term* Proceedings of the Third World

Congress of Nonlinear Analysts, Part 3 (Catania, 2000). Nonlinear Anal. 47 (2001), 1693–1701.

E-mail address: yfujita@sci.u-toyama.ac.jp