グロモフ・ハウスドルフ収束とP-ラプラシアン

本多正平（九州大学大学院数理学研究院）

1　講演アブストラクト

本講演は [11] の内容の内，p-ラプラシアンに関わる部分について話す．紹介したい主結果は 2 つある．このアブストラクトではその主結果までの必要最小限の言葉を準備することを主な目的とし，詳細は講演でお話をしたい．本講演では簡単のために，コンパクトなもののみを扱うが，ノンコンパクトの場合にも同様の議論が走ることは一言述べておきたい．

まずはハウスドルフ距離の復習から始める：

定義 1.1 (ハウスドルフ距離). Z を距離空間，A_1, A_2 を Z のコンパクト部分集合とする．このとき，A_1, A_2 の Z におけるハウスドルフ距離 $d_H^Z(A_1, A_2)$ を

$$d_H^Z(A_1, A_2) := \inf\{\epsilon > 0; A_1 \subset B_\epsilon(A_2), A_2 \subset B_\epsilon(A_1)\}$$

で定める．ここに，$B_\epsilon(A)$ は A の ϵ 近傍である．

d_H^Z が $\mathcal{M}_Z := \{A \subset Z; A$ はコンパクト $\}$ 上の距離を定めることは簡単にチェックできる．

次に，グロモフ・ハウスドルフ距離の定義を述べる：

定義 1.2 (グロモフ・ハウスドルフ距離, [8]). X, Y をコンパクト距離空間とする．X と Y のグロモフ・ハウスドルフ距離 $d_{GH}(X, Y)$ を

$$d_{GH}(X, Y) := \inf_{Z, \phi_X, \phi_Y}\{d_H^Z(\phi_X(X), \phi_Y(Y))\}$$

で定める．ここに，下限は距離空間 Z，等長埋め込み $\phi_X : X \hookrightarrow Z$ と $\phi_Y : Y \hookrightarrow Z$，全てにわたって取る．

上のような Z, ϕ_X, ϕ_Y は少なくとも一つは必ず存在する．例えば，$X \sqcup Y$ 上に適当に距離を入れて，そこに X, Y は等長的に埋め込むことができる．

コンパクト距離空間全体を等長という同値関係で割った集合を $\mathcal{M}$ と表す．d_{GH} の基本的な性質は次である：

命題 1.3 ([8]). d_{GH} は $\mathcal{M}$ 上の距離を定める.

例えば，半径が r の球面を考えたとき，r を 0 に持っていくと，その球面列は一点にグロモフ・ハウスドルフ（距離の意味で）収束する

自然数 n，実数 K，正の実数 d に対して，リッチ曲率が $K(n-1)$ 以上，直径が d 以下の n 次元コンパクトリーマン多様体からなる集合を $\mathcal{M}(n,K,d)$ で表す．リーマン多様体の収束・崩壊理論と呼ばれる分野の発端は次のコンパクト性定理であると言ってよい：

定理 1.4 ([8]). $\mathcal{M}(n,K,d)$ の $\mathcal{M}$ における閉包 $\overline{\mathcal{M}(n,K,d)}$ はコンパクトである.

粗く言って，$\overline{\mathcal{M}(n,K,d)}$ を調べることが多様体の収束・崩壊理論である．私はこの理論と，そのリーマン多様体への応用に興味がある.

$\overline{\mathcal{M}(n,K,d)}$ を調べるには測度論が有用である．そのために，測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束と呼ばれる概念を用意する：

定理 1.5 ([7, 8]). コンパクト距離空間 X とその上の確率ラドン測度 υ の組 (X,υ) 全体を，測度付き等長という同値関係で割った集合を $\mathcal{M}^{meas}$ と表す．このとき $\mathcal{M}^{meas}$ 上には測度付きグロモフ・ハウスドルフ距離と呼ばれるまっとうな距離 d_{GH}^{meas} が入る.

注意 1.6. 実は上では「測度付きグロモフ・ハウスドルフ距離」と呼んだが，これは私が（何となくわかりやすいかなと思い）勝手につけただけで，一般的ではない．人によってまちまちだが，例えば [15] ではグロモフ・ハウスドルフ・プロホルフ距離，と呼んでいるようである．この距離を具体的に計算することはまずないと言ってよい．大切なのは以下の命題 1.8 である.

定理 1.4 と同様にして次が成り立つことが知られている：

定理 1.7 ([7]). 自然数 n，実数 K，正の実数 d に対して，リッチ曲率が $K(n-1)$ 以上，直径が d 以下の n 次元コンパクトリーマン多様体 M と，その上の自然なリーマン確率測度の組 $(M, \mathrm{vol}/\mathrm{vol}\, M)$ からなる集合を $\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)$ で表す．このとき，$\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)$ の $\mathcal{M}^{meas}$ における閉包 $\overline{\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)}$ はコンパクトである.

本講演で，d_{GH}^{meas} については次がわかっていれば十分である：

命題 1.8 ([7, 8]). $\{(X_i,\upsilon_i)\}_{1\le i\le\infty} \subset \overline{\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)}$ とする．このとき，$d_{GH}^{meas}((X_i,\upsilon_i),(X_\infty,\upsilon_\infty)) \to 0$ となる（これを以下では簡単に $(X_i,\upsilon_i) \to (X_\infty,\upsilon_\infty)$ と書くことにする）ための必要十分条件は次が成り立つことである：ある正の実数列 $\epsilon_i \to 0$ と，ある（ボレル可測）写像の列 $\phi_i : X_i \to X_\infty$ があって，

1. 任意の i，任意の $x, y \in X_i$ に対して，$|\overline{x,y} - \overline{\phi_i(x),\phi_i(y)}| < \epsilon_i$ が成り立つ．ここに $\overline{x,y}$ は x と y の間の距離である.
2. $X_\infty \subset B_{\epsilon_i}(\phi_i(X_i))$.

3. $\upsilon_i(B_r(x_i)) \to \upsilon_\infty(B_r(x_\infty))$ が任意の $r > 0$，任意の $x_i \to x_\infty$ に対して成り立つ．ここに $x_i \to x_\infty$ とは $\phi_i(x_i) \to x_\infty$ のことを意味する．

実は上の命題で，三つ目の条件は υ_i を ϕ_i でプッシュフォワードした測度 $(\phi_i)_*\upsilon_i$ が X_∞ 上で υ_∞ に弱収束する，ということと同値である．

そこで以下では，$(X_i, \upsilon_i) \to (X_\infty, \upsilon_\infty)$ と書いたときには，上のような ϵ_i, ϕ_i を暗黙の内に一つ取って固定しているとする．

$\overline{\mathcal{M}^{meas}(n, K, d)}$ について，重要な仕事を一つ紹介する：

定理 1.9 ([4]). 任意の $(X, \upsilon) \in \overline{\mathcal{M}^{meas}(n, K, d)}$ に対して，余接束と呼ばれる位相空間 T^*X と，射影と呼ばれるボレル可測写像 $T^*X \to X$ が存在して次が成り立つ：

1. $\upsilon(X \setminus \pi(T^*X)) = 0$.

2. 任意の $x \in \pi(T^*X)$ に対して $\pi^{-1}(x)$ は自然な内積 $\langle v, u\rangle$ を持つ n 次元以下のベクトル空間である．

3. X 上で定義された任意のリプシッツ関数 f に対して，あるボレル部分集合 $X_f \subset \pi(T^*X)$ とボレル写像 $df : X_f \to T^*X$ *(*f の微分と呼ばれる*)* が存在し，次を満たす：

   (a) $\upsilon(X \setminus X_f) = 0$.

   (b) $\pi \circ df = id$.

   (c) $|df|(x) = \lim_{r\to 0} \sup_{B_r(x)\setminus\{x\}} |f(y) - f(x)|/\overline{x, y}$. ここに $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

この定理は粗く言って，古典的なラーデマハァの定理「ユークリッド空間上の任意のリプシッツ関数はほとんど至る所微分可能である」が多様体の極限でも成り立つ，ということを意味する．例えば一点 $x \in X$ からの距離関数 r_x は X 上で 1-リプシッツだから，その微分 $dr_x(z)$ がほとんど至る所の $z \in X$ で意味を持つ．

リーマン多様体のときと同様にして，上記 T^*X の双対を取ることで，接束 TX を考えることができる．また，df の双対切断を $\nabla f : X_f \to TX$ とかく．T^*X, TX は X 上 (ほとんど至る所定義された) ベクトル束とみなすことが出来る．

そこで今，非負整数 r, s に対して，

$$T^r_s X := \bigotimes_{i=1}^{r} TX \otimes \bigotimes_{i=r+1}^{r+s} T^*X$$

と置く．$r = s = 0$ のときはこれは自明束 $X \times \mathbf{R}$ と考える．これらもやはり X 上のベクトル束である．$T^r_s X$ への切断 T を X 上の (r, s) 型のテンソル場と呼ぶ．以下では $T^r_s X$ への L^p-切断全体を $L^p(T^r_s X)$ と書くことにする．これはもちろんバナッハ空間である．

ここで，次の問いを考える：

問：$\{(X_i,\upsilon_i)\}_{1\le i\le\infty}\subset\overline{\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)}$ が $(X_i,\upsilon_i)\to(X_\infty,\upsilon_\infty)$ を満たしているとする．このとき $T_i\in L^p(T^r_sX_i)(1\le i\le\infty)$ を取って，T_i が T_∞ に L^p 収束する，という概念を適切に定義することができるか？

例えば空間が止まっていてテンソル場だけが動く場合，すなわち $X_i\equiv X_\infty$ という状況であれば，$||T_i-T_\infty||_{L^p}\to 0$ とすればよい．これは当たり前である．しかし，空間も動かしてしまうと，この定義を与えることはとたんに難しくなる．その理由は，差 T_i-T_∞ を自然に考えることができないことによる．

注意 1.10. $r=s=0$ の場合，すなわち各 T_i が X_i 上の L^p 関数のときは桑江・塩谷によって上記**問**の答えが Yes であることが知られている [12, 13]. 実は関数の場合は差 T_i-T_∞ に相当する量が自然に定義できることがポイントになっている．テンソル場の場合は普通にやるとそこがうまくいかない．

本講演で紹介したい主結果その 1 は次で，p が 1 でない有限の値ならば上記**問**の答えは Yes，ということである：

定義 1.11 ([11]). 上の状況で，$1<p<\infty$ と仮定する．

1. T_i が T_∞ に L^p 弱収束するとは，$\sup_i||T_i||_{L^p}<\infty$ であって，
$$\int_{B_r(x_i)}T_i(dr_{x_i^1},\dots,dr_{x_i^r},\nabla r_{x_i^{r+1}},\dots,\nabla r_{x_i^{r+s}})d\upsilon_i$$
$$\to\int_{B_r(x_\infty)}T_\infty(dr_{x_\infty^1},\dots,dr_{x_\infty^r},\nabla r_{x_\infty^{r+1}},\dots,\nabla r_{x_\infty^{r+s}})d\upsilon_\infty$$
が任意の $r>0$，任意の $x_i\to x_\infty$，任意の $x_i^j\to x_\infty^j$ で成り立つことを言う．
2. T_i が T_∞ に L^p 強収束するとは，T_i が T_∞ に L^p 弱収束し，かつ $\limsup_{i\to\infty}||T_i||_{L^p}\le ||T_\infty||_{L^p}$ が成り立つことを言う．

上の定義だと欲しい性質は満足する．例えば，L^p 有界列は L^p 弱収束部分列を持つ，弱収束列においてノルムは下半連続である，などが成り立つ．また，上で p が 1 と ∞ を考えていないのは，クラークソンの不等式 [5] と呼ばれる不等式と関係がある．それについては時間が許せば講演中に触れる．

上記定義に関して一つだけ重要な性質を述べる．$(X,\upsilon)\in\overline{\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)}$ と $1<p<\infty$ に対して，ソボレフ空間 $H_{1,p}(X)$ が well-defined なことは知られている．このとき，次のレーリッヒ型のコンパクト性定理が成り立つ：

定理 1.12 ([11]). $1<p<\infty$, $\{(X_i,\upsilon_i)\}_{1\le i\le\infty}\subset\overline{\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)}$ が $(X_i,\upsilon_i)\to(X_\infty,\upsilon_\infty)$ を満たしているとする．このとき，関数列 $\{f_i\}_{i<\infty}$ が，$f_i\in H_{1,p}(X_i)$ かつ $\sup_i||f_i||_{H_{1,p}}<\infty$ を満たしていれば，部分列 $\{f_{i(j)}\}_j$ と $f_\infty\in H_{1,p}(X_\infty)$ が存在して次が成り立つ：

1. $f_{i(j)}$ は f_∞ に L^p 強収束する．

2. $df_{i(j)}$ は df_∞ に L^p 弱収束する．

この定理 1.12 が p-ラプラシアンの研究へ応用を持つ．$(X,\upsilon) \in \overline{\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)}$ に対して，もし X が一点でなければ

$$\lambda_{1,p}(X) := \inf \left\{ \frac{||df||_{L^p}^p}{||f||_{L^p}^p}; f \in H_{1,p}(X), f \not\equiv 0, \int_X |f|^{p-2} f d\upsilon = 0 \right\}$$

と置き，一点ならば $\lambda_{1,p}(X) := \infty$ と置く．

次はよく知られている：$(X,\upsilon) \in \mathcal{M}^{meas}(n,K,d)$ ならば，$\lambda_{1,p}(X)$ は p-ラプラシアンの正の最小固有値

$$-\mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) = \lambda |f|^{p-2} f$$

に一致する．

本講演で述べたい主結果その 2 は次である：

定理 1.13. *[11]* 写像 $\lambda_{1,*} : \overline{\mathcal{M}^{meas}(n,K,d)} \times (1,\infty) \to (0,\infty]$ は連続である．

この定理を $p=2$ で切った主張はすでに知られている [7].

空間とテンソル場を両方同時に動かして考えた最大の利点は，これまでに述べた全てのコンパクト性定理である．例えば，コンパクト集合上の連続関数は最大値，最小値を持つ，という事実を使えば次が簡単に得られる：

系 1.14. $1 < p_1 < p_2 < \infty$ とする．今，n 次元コンパクトリーマン多様体 M が

$$(\mathrm{diam}\, M)^2 \mathrm{Ric}_M \geq (n-1)K$$

を満たしていれば，任意の $p_1 \leq p \leq p_2$ に対して，

$$0 < C_1(n,K,p_1,p_2) \leq (\mathrm{diam}\, M)^p \lambda_{1,p}(M) \leq C_2(n,K,p_1,p_2) < \infty$$

が成り立つ．ここに，$\mathrm{diam}\, M$ は M の直径のことであり，$C_1(n,k,p_1,p_2), C_2(n,K,p_1,p_2)$ は n, K にのみ依存して定まる正の実数である．

この系にはグロモフ・ハウスドルフ収束の言葉は全く出てきていないことに注意する．

References

[1] J. Cheeger and T. H. Colding, Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products, Ann. of Math. 144 (1996), 189-237.

[2] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I, J. Differential Geom. 45 (1997), 406-480.

[3] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, II, J. Differential Geom. 54 (2000), 13-35.

[4] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, J. Differential Geom. 54 (2000), 37-74.

[5] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

[6] T. H. Colding and A. Naber, Lower Ricci Curvature, Branching and Bi-Lipschitz Structure of Uniform Reifenberg Spaces, http://arxiv.org/abs/1111.2184, preprint.

[7] K. Fukaya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of the laplace operator, Invent. Math. 87 (1987), 517-547.

[8] M. Gromov, Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, Birkhauser Boston Inc, Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[9] S. Honda, Ricci curvature and convergence of Lipschitz functions, Commun. Anal. Geom. 19 (2011), 79-158.

[10] S. Honda, A weakly second order differential structure on rectifiable metric measure spaces, arXiv:1112.0099, preprint.

[11] S. Honda, Ricci curvature and L^p-convergence, arXiv:1212.2052, preprint.

[12] K. Kuwae and T. Shioya, Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry, Commun. Anal. Geom. 11 (2003), 599-673.

[13] K. Kuwae and T. Shioya, Variational convergence over metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 35-75 (electronic).

[14] D.Valtorta, On the p-Laplace operator on Riemannian manifolds, arXiv:1212.3422, preprint.

[15] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer-Verlag, 2008.