Global existence of solutions for a two-dimensional parabolic-elliptic system of chemotaxis with critical mass

永井　敏隆（広島大学名誉教授）

次の放物型 - 楕円型方程式系に対する初期値問題 (CP) を考える．

$$
\text{(CP)} \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla \psi), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}
$$

ただし，ψ は

$$
\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log \frac{1}{|x-y|} u(t,y)\, dy
$$

で与えられるものとする．

(CP) の非負解 u に対し，質量保存 $\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx$ $(t > 0)$ が成りたち，全質量 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx$ の大きさは非負解の時間大域的存在等に影響を与えることが知られている：優臨界 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx > 8\pi$ ならば，非負解は有限時間で爆発する可能性があり，劣臨界 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx < 8\pi$ ならば，非負解は時間大域的に存在し，時間無限大で零に減衰する．

臨界条件 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx = 8\pi$ を満たす非負な初期データー $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ に対する (CP) の非負解の時間大域的存在について，Blanchet-Carrillo-Masmoudi は条件 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) \log u_0(x)\, dx < \infty$，$\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)|x|^2\, dx < \infty$ の下で，Nagai-Ogawa は条件 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) \log(1+|x|)\, dx < \infty$ の下で時間大域的存在を示している．本講演で，非負な初期データー に対し空間遠方での減衰条件を課さないで条件 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ のみで，非負解の時間大域的存在について考察をする．