動的境界条件付き半線形楕円型方程式の解の大域挙動

川上 竜樹 (大阪府立大学 学術研究院第２学群数学系)

本講演内容は Marek Fila 氏 (Comenius 大学) 及び石毛和弘氏 (東北大学) との共同研究 [1, 2, 3] に基づくものである．次の動的境界条件付き半線形楕円型方程式を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p, & x \in \mathbb{R}^N_+,\ \ t > 0, \\ \partial_t u + \partial_\nu u = 0, & x \in \partial\mathbb{R}^N_+,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x') \geq 0, & x = (x',0) \in \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $N \geq 2$, $\mathbb{R}^N_+ := \{x = (x', x_N) : x' \in \mathbb{R}^{N-1},\ x_N > 0\}$ である．また Δ は x に関する N 次元の Laplacian であり, $\partial_t := \partial/\partial t$, $\partial_\nu := -\partial/\partial x_N$, かつ $p > 1$ とする．本講演では問題 (1) の時間局所また大域可解性並びに大域挙動について得られた結果を紹介する．

主定理を述べる前にいくつかの記号と解の定義を導入する．任意の $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ と $\lambda > 0$ に対して, $\mathcal{P}$ を $(N-1)$ 次元の Poisson 核

$$\mathcal{P}(x', \lambda) := c_N \lambda^{1-N} \left(1 + \left| \frac{x'}{\lambda} \right|^2 \right)^{-N/2}$$

と定める．ここで c_N は

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{P}(x', \lambda)\, dx' = 1, \qquad \lambda > 0$$

をみたす定数である．このとき

$$P(x', x_N, t) := \mathcal{P}(x', x_N + t), \qquad (x', x_N, t) \in \mathbb{R}^N_+ \times (0, \infty)$$

は半空間 $\mathbb{R}^N_+$ における斉次動的境界条件付き Laplace 方程式の基本解となる．すなわち P は

$$\begin{cases} -\Delta P = 0, & x \in \mathbb{R}^N_+,\ \ t > 0, \\ \partial_t P + \partial_\nu P = 0, & x \in \partial\mathbb{R}^N_+,\ \ t > 0, \\ P(x,0) = \delta(x), & x \in \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

をみたす．ここで $\delta = \delta(\cdot)$ は $\partial\mathbb{R}^N_+$ 上の Dirac のデルタ関数である．また本講演を通して, しばしば $\partial\mathbb{R}^N_+$ を $\mathbb{R}^{N-1}$ と同一視する．さらに $y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^N_+$ に対して, $y_* := (y', -y_N)$ とし, G を

$$G(x,y) := \begin{cases} \dfrac{c_N}{2(N-2)} \left(|x-y|^{-(N-2)} - |x-y_*|^{-(N-2)} \right) & \text{if} \quad N \geq 3, \\ \dfrac{1}{4\pi} \log \left(1 + \dfrac{4x_2 y_2}{|x-y|^2} \right) & \text{if} \quad N = 2 \end{cases}$$

と定める．これは半空間 $\mathbb{R}^N_+$ における斉次 Dirichlet 境界条件付き Laplace 方程式の Green 関数である．これらの記号のもと, 次のように (1) の解の定義を与える．

定義 1 φ を $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の非負可測関数とする．

(i) 任意の $\sigma > 0$ に対して, $\mathbb{R}^N_+ \times (0, \sigma]$ で定義された非負可測関数 u が $\mathbb{R}^N_+ \times (0, \sigma]$ 上の (1) の解

であるとは, ほとんど至る所の $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ と全ての $x_N \in [0,\infty)$, $t \in (0,\sigma]$ に対して

$$u(x',x_N,t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} P(x'-y',x_N,t)\varphi(y')dy' + \int_{\mathbb{R}^N_+} G(x,y)u(y,t)^p dy$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N_+} P(x'-y',x_N+y_N,t-s)u(y,s)^p dy\,ds < \infty \tag{2}$$

をみたすことである.

(ii) ある $\sigma > 0$ に対して u が $\mathbb{R}^N_+ \times (0,\sigma]$ 上の (1) の解であるとき, u は (1) の時間局所解であるといい, 任意の $\sigma > 0$ に対して u が $\mathbb{R}^N_+ \times (0,\sigma]$ 上の (1) の解であるとき, u は (1) の時間大域解であるという.

(iii) u を $\mathbb{R}^N_+ \times (0,\sigma]$ 上の (1) の解であるとする. 任意の $\mathbb{R}^N_+ \times (0,\sigma]$ 上の (1) の解 v に対して

$$u(x',x_N,t) \le v(x',x_N,t)$$

がほとんど至る所の $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ と全ての $x_N \ge 0$, $t > 0$ に対して成立するとき, u は $\mathbb{R}^N_+ \times (0,\sigma]$ 上の (1) の最小解であるという.

以下, 簡単のため任意の $1 \le r \le \infty$ に対して,

$$|\cdot|_r := \|\cdot\|_{L^r(\partial\mathbb{R}^N_+)}, \qquad \|\cdot\|_r := \|\cdot\|_{L^r(\mathbb{R}^N_+)}, \qquad |||\cdot|||_r := \|\cdot\|_{L^r(\mathbb{R}^N_+, x_N dx)}$$

とし, また

$$p_* := \frac{N+1}{N-1} = 1 + \frac{2}{N-1}$$

と定める.

以下, 主定理を述べる. まず問題 (1) の時間大域解に対する結果を紹介する.

定理 1 ([1, 2]) (i) $1 < p \le p_*$ とする. このとき問題 (1) は非自明な時間大域解を持たない.
(ii) $p > p_*$ とし,

$$\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}).$$

を仮定する. このとき次が成立する:

(a) 初期値 φ が

$$|\varphi|_1 |\varphi|_\infty^{\frac{N-1}{2}(p-1)-1} < \delta$$

をみたすならば,

$$\sup_{t>0}(1+t)^{N-1-\frac{N}{q}}\|u(t)\|_q < \infty, \qquad q \in (p_*,\infty], \tag{3}$$
$$\sup_{t>0}(1+t)^{(N-1)(1-\frac{p_*}{p})}|||u(t)|||_p < \infty \tag{4}$$

をみたす問題 (1) の時間大域最小解 u が存在する様な正定数 δ が存在する;

(b) v を (3) および (4) をみたす問題 (1) の時間大域解とする. このとき v は問題 (1) の時間大域古典解であり, 任意の $q \in (p_*,\infty]$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} t^{N-1-\frac{N}{q}}\|v(t) - C_* P(t)\|_q = 0$$

をみたす極限

$$C_* := \lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x',0,t)dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi(x')dx' + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N_+} v(x,t)^p dx\,dt$$

が存在する.

この定理 1 より, 指数 p_* が (定義 1 の意味で) 問題 (1) の時間大域可解性を分ける臨界指数, いわゆる藤田指数であることがわかる．また定理 1-(ii)-(b) の主張より, ここで得られた小さな時間大域最小解は Poisson 核に収束することがわかる．一方で, [1, 2]では (i) の証明に際しては全空間における藤田方程式に用いられる背理法をもとに証明を行っているため, 時間局所可解性については $p > p_*$ の場合しか扱われていない．そこで [3] では時間局所可解性について次の結果を得た．

定理 2 ([3]) (i) $1 < p < p_*$ とする．このとき問題 (1) は非自明な時間局所解を持たない．
(ii) $p \geq p_*$ とし, ψ を

$$\liminf_{|x'|\to\infty} |x'|^{\frac{2}{p-1}} \psi(x') > 0$$

をみたす非負関数とする．このとき初期値 φ が

$$\varphi(x') \geq \kappa\psi(x'), \qquad x' \in \mathbb{R}^{N-1}$$

をみたすならば, 問題 (1) は非自明な時間局所解を持たない様な正定数 κ が存在する．

定理 2-(i) より $1 < p < p_*$ のときは時間大域解が存在しないだけでなく, 時間局所解すら存在しないことがわかる．また定理 2-(ii) より, $p \geq p_*$ の場合の問題 (1) の時間局所可解性の初期値に関する必要条件が得られた．また, $p > p_*$ の場合, 次が得られる．

定理 3 ([3]) $p > p_*$ とする．このとき初期値 φ が

$$\varphi(x') \leq k(1 + |x'|)^{-\frac{2}{p-1}}, \qquad x' \in \mathbb{R}^{N-1} \tag{5}$$

をみたすならば,

$$u(x,t) \leq C(1 + |x'| + x_N + t)^{-\frac{2}{p-1}}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N_+ \times (0,\infty),$$

をみたす問題 (1) の時間大域解 u が存在する様な正定数 k が存在する．

定理 2 及び 3 より, $p > p_*$ の場合, 問題 (1) の可解性について (5) で与えられる初期値の空間遠方における減衰評価はこれ以上改善できないことがわかる．

参考文献

[1] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Large-time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Adv. Differential Equations, 18 (2013), 69–100.

[2] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Large-time behavior of small solutions of a two-dimensional semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Asymptotic Analysis, 85 (2013), 107–123.

[3] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, preprint.