圧縮性 Navier-Stokes 方程式の臨界空間における解の減衰評価

沖田 匡聡 (おきた まさとし)
九州大学数理学府 博士 3 年
E-mail: m-okita@math.kyushu-u.ac.jp

1 Introduction

$\mathbb{R}^n(n \geq 2)$ での次の圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題について考える.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \triangle u + \frac{\mu + \mu'}{\rho} \nabla (\nabla \cdot u), \\ (\rho, u)(0, x) = (\rho_0, u_0)(x). \end{cases} \tag{1}$$

ここで $t > 0, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ であり, 未知関数 $\rho = \rho(t,x) > 0$ 及び $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_n(t,x))$ をそれぞれ, 密度及び流速とする. $P = P(\rho)$ は圧力, μ, μ' は粘性係数であり, $\mu > 0, \mu' + \frac{2}{n}\mu \geq 0$ を満たす定数である. $\bar{\rho}$ は与えられた正定数であり, $P(\rho)$ は $\bar{\rho}$ の近傍で滑らかであり $P'(\bar{\rho}) > 0$ を満たす.

我々は, 初期摂動 $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0)$ が斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}^0_{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}^0_{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ で十分小さいときに, (1) の解 $\big(\rho(t), u(t)\big)$ の $t \to \infty$ としたときの定数定常解 $(\bar{\rho}, 0)$ への収束の速さについて考察した.

関数列 $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を Littlewood-Paley の二進単位分解とし, $\hat{\Phi} = 1 - \sum_{j \geq 0} \hat{\phi}_j$ とする. $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, r \leq \infty$ に対して, 非斉次 Besov 空間を $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'; \|u\|_{B^s_{p,r}} < \infty\}$, 斉次ベゾフ空間を $\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'; \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} < \infty\}$ とし, ノルムをそれぞれ

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} := \|\Phi * u\|_{L^p} + \left\|2^{js}\|\phi_j * u\|_{L^p}\right\|_{l^r(\{k \geq 0\})}, \quad \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} := \left\|2^{js}\|\dot{\phi}_j * u\|_{L^p}\right\|_{l^r(\mathbb{Z})}$$

で定義する.

圧縮性 Navier-Stokes 方程式の研究は数多く存在し, $n = 3$ のとき, 初期摂動が $H^3(\mathbb{R}^3)$ で十分小さいときの存在と一意性, さらに定常解の安定性や解の収束率が Matsumura-Nishida [5][6] にあり, 初期摂動に L^1 の仮定を加えることで

$$\|\nabla^k(\rho - \rho_*, u)(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{4} - \frac{k}{2}} \quad k = 0, 1 \tag{2}$$

を得ている.

Kawashita [4] により $n \geq 2$ に対して, 初期摂動が H^{s_0} $(s_0 = [\frac{n}{2}] + 1)$ に含まれるときの圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の存在と大域解の存在を示している.

また, Wang-Tan [8] は $n = 3$ においての場合を考察し, 初期摂動が $H^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$ で十分小さいとき (2) を得ている. さらに, Okita [7] では初期摂動が $H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) (s_0 = [\frac{n}{2}] + 1, n \geq 2)$ に含まれるとき

$$\|\nabla^k(\rho - \bar{\rho}, u)(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4} - \frac{k}{2}} \quad k = 0, \cdots, s_0,$$

を得た.

さらに Li-Zhang [3] により初期摂動が $H^4(\mathbb{R}^3) \cap \dot{B}^0_{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ で十分小さいとき (2) を得ている.

ここで臨界空間について述べる. スケール変換を

$$\rho_\lambda(t,x) := \rho(\lambda^2 t, \lambda x), \quad u_\lambda(t,x) := \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

と置くと, 圧力 P が適当な仮定を課したとき (ρ, u) が (1) の解であるならば, $(\rho_\lambda, u_\lambda)$ も解となる. スケール変換 $(\rho, u) \to (\rho_\lambda, u_\lambda)$ に対し, ノルムが不変となる空間を臨界空間と呼ぶ.

臨界空間であるベゾフ空間においての結果はDanchin [1] により $n \geq 2$ で初期摂動 $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0)$ が斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ で十分小さいとき大域解の存在と一意性が示されている.

非斉次ベゾフ空間での結果は Haspot [2] により $n \geq 2$ で初期摂動 $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0)$ が非斉次ベゾフ空間 $B^{\frac{n}{2}}_{2,1}(\mathbb{R}^n) \times B^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}(\mathbb{R}^n)$ に含まれるときに局所解の存在を示している.

上の臨界空間において (1) の減衰評価について次の結果を得た.

2 Main Result

定理 2.1. $n \geq 2$ のとき, ある定数 $\epsilon > 0$ が存在して, 初期摂動 $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0)$ が $u_0 \in \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1} \cap \dot{B}^0_{1,\infty}$, $(\rho_0 - \bar{\rho}) \in \dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1} \cap \dot{B}^0_{1,\infty}$ に含まれ,

$$\|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1} \cap \dot{B}^0_{1,\infty}} + \|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1} \cap \dot{B}^0_{1,\infty}} \leq \epsilon,$$

を満たすならば (1) の一意の大域解 $(\rho - \bar{\rho}, u) \in C(\mathbb{R}^+; B^{\frac{n}{2}}_{2,1}) \times \big(C(\mathbb{R}^+; B^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}^{\frac{n}{2}+1}_{2,1})\big)$ が存在する. さらに,

$$\|(\rho - \bar{\rho}, u)(t)\|_{L^2 \times L^2} \leq C_0(1+t)^{-\frac{n}{4}},$$

$$\|(\rho - \bar{\rho}, u)(t)\|_{\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1} \times \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}} \leq C_0(1+t)^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}},$$

$$\|(\rho - \bar{\rho})(t)\|_{\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}} \leq C_0(1+t)^{-\frac{n}{2}},$$

が $t \geq 0$ で成り立つ.

注意 2.2.

(1) $\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1} \cap \dot{B}^0_{1,\infty} \subset B^{\frac{n}{2}-1}_{2,1} \subset L^2$ が成り立つ.

(2) $L^1 \subset \dot{B}^0_{1,\infty}$ が成り立つ.

証明の概要は, まず方程式を低周波部分と高周波部分に分解してそれぞれを評価する. 低周波の部分の解の評価は線形化半群の減衰評価を用いる. 高周波部分については, エネルギー法を使い評価する. 2 つの評価を合わせて解の減衰評価を得る.

参考文献

[1] R. Danchin, Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, Invent. Math. **141**, (2000) 579-614

[2] B. Haspot, Well-posedness in critical spaces for the system of compressible Navier-Stokes in larger spaces, J. Differential Equations **251** (2011) 2262-2295

[3] H-Liang. Li, T. Zhang, Large time behavior of isentropic compressible Navier-Stokes system in $\mathbb{R}^3$, Math. Meth Appl. Sci **34** (2011), 670-682.

[4] M. Kawashita, On global soluition of Cauchy problems for compressible Navier- Stokes equation , Nonlinear Analysis 48 (2002) 1087-1105

[5] A. Matsumura, T. Nishida, The initial value problem for the equation of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, Proc. Japan Acad. Ser. A 55 (1979) 337-342

[6] A. Matsumura, T. Nishida, The initial value problems for the equation of motion of compressible viscous and heat-conductive gases, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980) 67-104

[7] M. Okita, On the convergence rates for the compressible Navier- Stokes equations with potential force, to appear in Kyushu J. Math.

[8] Yanjin Wang, Zhong Tan. Global existence and optimal decay rate for the strong solution in H^2 to the compressible Navier-Stokes equation, Applied Mathematics Letters 24 (2011) 1778-1784.