# Compressible and Incompressible two phase problem including the phase transition

柴田 良弘 *

$\Omega$ を $\mathbb{R}^N$ の領域、$\Omega_- \subset \Omega$. $\Gamma = \partial\Omega_- \subset \Omega$, $\partial\Omega \cap \Gamma = \emptyset$. $\Omega_+ = \Omega - \overline{\Omega_-}$ とする．$\varphi : \Omega \to \Omega$: $\xi \mapsto \varphi(\xi, t)$ に対して

$$\Omega_\pm(t) = \{x = \varphi(\xi, t) \mid \xi \in \Omega_\pm\}, \quad \Gamma(t) = \{x = \varphi(\xi, t) \mid \xi \in \Gamma\},$$

$\partial_t\varphi(\xi, t) = \mathbf{v}(x, t)$ $(x = \varphi(\xi, t))$, $\dot\Omega(t) = \Omega_-(t) \cup \Omega_+(t)$ とおく．$\dot\Omega(t)$ で定義された関数 $v$ に対して $v_\pm = v|_{\Omega_\pm(t)}$ とおく．このとき the jump of $v$ accross $\Gamma(t)$ $[[v]]$ を $[[v]] = v_-|_{\Gamma(t)} - v_+|_{\Gamma(t)}$ で定義する．$\mathbf{n}_\Gamma$ を $\Gamma(t)$ の単位外法線 (向きは $\Omega_-$ から $\Omega_+$), $H_\Gamma = -\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma$ を $\Gamma(t)$ の平均曲率, $\rho : \dot\Omega \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty)$ を質量場 (mass field), $\mathbf{u} : \dot\Omega \to \mathbb{R}^N$ を速度場 (velocity field), $\pi : \dot\Omega \to \mathbb{R}$ を圧力場 (pressure field), $\mathbf{T} : \dot\Omega \to \{A \in GL_N(\mathbb{R}) \mid {}^TA = A\}$ を応力テンソル場 (stress tensor field), $\mathbf{D} = \frac{1}{2}({}^T\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}) : \dot\Omega \to \{A \in GL_N(\mathbb{R}) \mid {}^TA = A\}$ をひずみテンソル場 (strain tensor field), $\theta : \dot\Omega \to \overline{\mathbb{R}_+}$ を温度場 (thermal field), $e : \dot\Omega \to \overline{\mathbb{R}_+}$ を内部エネルギィー (internal energy), $\eta : \dot\Omega \to \mathbb{R}$ をエントロピィー (entropy), $\psi = e - \theta\eta$ を自由エネルギィー, $\kappa_v = \frac{\partial e}{\partial\theta}$ を比熱, $\mu$, $\lambda$ を第一、第二粘性係数, $\mathbf{q} : \dot\Omega \to \mathbb{R}^N$ を熱流速 (heat flux), $\mathbf{f} : \dot\Omega \to \mathbb{R}^N$ を外力 (external force) $r : \dot\Omega \to \mathbb{R}$ を熱供給 (heat supply), $\jmath$ を質量流速 (phase flux) として次の方程式を考える．

$$\begin{aligned}
&\partial_t\rho + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}) = 0 && \text{in } \dot\Omega(t),\\
&\rho(\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \mathrm{div}\,\mathbf{T} - \rho\mathbf{f} && \text{in } \dot\Omega(t),\\
&\rho\kappa_v(\partial_t\theta + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta) - \mathrm{div}\,\mathbf{q} &&\\
&\quad - (2\mu|\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 + (\lambda - \mu)(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2) + (\pi - \rho^2\frac{\partial e}{\partial\rho})\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \rho r && \text{in } \dot\Omega(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

eq:1

**interface condition**

- $\jmath = 0$ の場合

$$\begin{aligned}
&[[\mathbf{u}]] = 0, \quad [[\mathbf{T}\mathbf{n}_\Gamma]] = \sigma H_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma,\\
&[[\theta]] = 0, \quad [[\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_\Gamma]] = 0,\\
&V_\Gamma := \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\Gamma.
\end{aligned} \tag{2}$$

eq:2

- $\jmath \neq 0$ かつ $[[\rho]] \neq 0$ の場合

$$\begin{aligned}
&[[\mathcal{T}_\Gamma\mathbf{u}]] = 0, \quad \jmath[[\mathbf{T}\mathbf{n}_\Gamma]] - [[\mathbf{T}\mathbf{n}_\Gamma]] = -\sigma H_\Gamma\mathbf{n}_\Gamma, \quad [[\psi]] + \jmath^2[[\frac{1}{2\rho^2}]] - [[\frac{1}{\rho}\mathbf{n}_\Gamma\mathbf{T}\mathbf{n}_\Gamma]] = 0,\\
&[[\theta]] = 0, \quad \jmath[[\theta\eta]] - [[\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_\Gamma]] = 0,\\
&V_\Gamma := \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_\Gamma = \frac{[[\rho\mathbf{u}]]\cdot\mathbf{n}_\Gamma}{[[\rho]]}.
\end{aligned} \tag{3}$$

eq:3

$\partial\Omega$ での境界条件は

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{4}$$

eq:4

*早稲田大学基幹理工学部数学科及び早稲田大学理工学研究所
169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1
e-mail address: yshibata@waseda.jp
Partially supported by JST CREST and JSPS Grant-in-aid for Scientific Research (S) # 24224004

$\mathbf{n}$ は $\partial\Omega$ の単位外法線である．$\partial\Omega$ は自由境界でも良い．初期条件は

$$(\rho, \mathbf{u}, \theta)|_{t=0} = (\rho_* + \rho_0, \mathbf{u}_0, \theta_* + \theta_0) \quad \text{in } \dot{\Omega} = \Omega_- \cup \Omega_+. \tag{5}$$

eq:5

ただし，$\rho_{*\pm} = \rho_*|_{\Omega_\pm(t)}$, $\theta_{*\pm} = \theta_*|_{\Omega_\pm(t)}$ は正定数とし，それぞれ $\Omega_\pm$ の基準質量 (reference mass) と基準温度 (reference temperature) を表すとする．またベクトル値関数 $\mathbf{w} = {}^T(w_1, \ldots, w_N)$ と $N \times N$ 行列値関数 $\mathbf{K} = (K_{ij})$ に対して

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = \sum_{j=1}^N \partial_j w_j, \quad \operatorname{div}\mathbf{K} = {}^T(\sum_{j=1}^N \partial_j K_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^K \partial_j K_{Nj})$$

と定義する．ただし，${}^T M$ は $M$ の転置を表す．

質量保存則より $\Gamma(t)$ 上 $j = \rho_+(\mathbf{u}_+ - \mathbf{v}) = \rho_-(\mathbf{u}_- - \mathbf{v})$ と与えられる．$\jmath \neq 0$, $[[\rho]] \neq 0$ のときは，$\jmath = \frac{[[\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\Gamma]]}{[[1/\rho]]}$ と求まる．

以下 $\Omega_+$ は気体 (gas), $\Omega_-$ に液体 (liquid) が占める場合を考える．簡単のため，$\rho_- = \rho_{*-}$ と液体の質量密度は基準密度と同じとする．とくに

$$\partial_t \rho_- + \operatorname{div}(\rho_- \mathbf{u}_-) = \rho_{*-}\operatorname{div}\mathbf{u}_- = 0 \quad \text{in } \Omega_-(t).$$

また $\pi_+ = \pi|_{\Omega_+(t)} = P(\rho_+, \theta_+)$ と与えられているとする．ここで $P$ は $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ で定義された実数値の $C^\infty$ 関数で $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$ を仮定する．$\mathbf{T}$

$$\mathbf{T}_+ = \mu_+ \mathbf{D}(\mathbf{u}_+) + (\lambda_+ - \mu_+)\operatorname{div}\mathbf{u}_+ \mathbf{I} - \pi_+ \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_- = \mu_- \mathbf{D}(\mathbf{u}_-) - \pi_- \mathbf{I}$$

で与えられるとする． ただし，$\mathbf{I}$ は $N \times N$ 単位行列を表す．$\mu_+ = \mu(\rho, \theta)$, $\lambda_+ = \lambda_+(\rho, \theta)$ は $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ で定義された正値の $C^\infty$ 関数, $\mu_- = \mu_-(\theta)$ は $\theta \in (0, \infty)$ で定義された正値の $C^\infty$ 関数とする．また

$$\mathbf{q} = -d\nabla\theta$$

で与えられるとする．ここで $d_+(\rho, \theta) = d|_{\Omega_+(t)}$ は $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ で定義された正値の $C^\infty$ 関数, $d_-(\theta) = d|_{\Omega_-(t)}$ は $\theta \in (0, \infty)$ で定義された正値の $C^\infty$ 関数とする．$\kappa_{v+} = \kappa_{v+}(\rho, \theta)$ は $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ で定義された正値の $C^\infty$ 関数, $\kappa_{v-} = \kappa_{v-}(\theta)$ は $\theta \in (0, \infty)$ で定義された正値の $C^\infty$ 関数とする．$e_+ = e_+(\rho, \theta)$, $\eta_+ = \eta_+(\rho, \theta)$ は $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ で定義された実数値の $C^\infty$ 関数, $e_- = e_-(\theta)$, $\eta_- = \eta_-(\theta)$ は $\theta \in (0, \infty)$ で定義された実数値の $C^\infty$ 関数とする．$\pi_{**-}$ は

$$\psi_-(\theta_{*-}) - \psi_+(\rho_{*+}, \theta_{*+}) - \Big(\frac{\pi_{**-}}{\rho_{*-}} - \frac{P(\rho_{*+}, \theta_{*+})}{\rho_{*+}}\Big) = 0$$

なる定数として，$\pi_- = \pi_{**-} + \pi'_-$ として方程式を書き換える． 方程式を flat interface $\mathbb{R}^N_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N = 0\}$ の近くで考える．$\Gamma(t)$ は $\mathbb{R}^{N-1}$ のグラフ

$$\begin{aligned}
&\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N = h(x', t) \ \text{ for } x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ and } t \geq 0\}, \\
&\Omega_\pm(t) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \pm(x_N - h(x', t)) > 0 \ \text{ for } x' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ and } t \geq 0\}.
\end{aligned}$$

で与えられているとする．$h$ は未知関数である．$H(x, t)$ を $(1 - \Delta)H = 0$ in $\mathbb{R}^N$, $H|_{x_N=0} = h(x', t)$ の解とする．$H$ の代わりに必要とあれば十分小なる $\epsilon > 0$ に対して $H(x', \epsilon x_N, t)$ を考えて，$1 + \frac{\partial}{\partial x_N}H \geq 1/2$ が非線形問題を解くときにいつも満たされているとしてよい．$\varphi(x, t) = (x', x_N + H(x, t))$ とおく．$\Gamma(t) = \{y = \varphi(x', 0, t) \mid x' \in \mathbb{R}^{N-1}\}$, $\Omega_\pm(t) = \{y = \varphi(x, t) \mid \pm x_N > 0\}$ である．また，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n}_\Gamma = (\nabla' h, -1)/\sqrt{|\nabla' h|^2 + 1} \ \ (\nabla' h = (\partial_1 h, \ldots, \partial_{N-1} h)), \\
&V_\Gamma = \partial_t \varphi \cdot \mathbf{n}_\Gamma = -\partial_t H/\sqrt{|\nabla' H|^2 + 1}, \\
&\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{H_0}{1 + H_N}\frac{\partial}{\partial x_N}, \ \ \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{H_j}{1 + H_N}\frac{\partial}{\partial x_N}
\end{aligned}$$

where $H_0 = \partial_t H$, $H_j = \partial_j H$ また $\mathrm{div}_{\,y} a = 0$ は $\mathrm{div}\, a + \sum_{\ell=1}^N \{\frac{\partial}{\partial x_\ell}(H_N a_\ell) - \frac{\partial}{\partial x_N}(H_\ell a_\ell)\} = \mathrm{div}\, a + \sum_{\ell=1}^{N-1}(H_N - H_\ell)\frac{\partial a_\ell}{\partial x_\ell} = 0$ となる．$\Omega_+(t)$ 側の方程式を放物型方程式の範疇で扱うには transport equation:

$$\partial_t \rho_+ + \mathrm{div}\,(\rho_+ \mathbf{u}_+) = 0 \quad \text{in } \Omega_+(t)$$

を消去する必要がある．以下 $\mathbb{R}^N_\pm = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \pm x_N > 0\}$ とおく．

まず上の変数変換で

$$\partial_t \rho_+ + \mathrm{div}\,(\rho_+ \mathbf{u}_+) + \rho_+ G = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N_+$$

となる．ただし，

$$G = \frac{1}{1 + H_N}\{\partial_N(\sum_{j=1}^{N-1} H_j u_{+j} + H_0) + (\partial_N H_N) u_{+N} - \sum_{j=1}^{N-1} H_j \partial_j u_{+j}\}.$$

そこで $\rho_+$ を $\mathbf{u}_+$, $H$ を用いて表す．$\mathbf{u}_+$ を $\mathbb{R}^N_-$ に Lion's extension する．即ち，$\tilde{\mathbf{u}}_+$ を

$$\tilde{\mathbf{u}}_+ = \begin{cases} \mathbf{u}_+ & x_+ > 0, \\ a\mathbf{u}_+(x', -x_N, t) + b\mathbf{u}_+(x', -2x_N, t) & x_+ < 0, \end{cases}$$

で定義する．ここで $a, b$ は $a + b = 1$, $-a - 2b = 1$ なる定数である．$\mathbf{u}_+ \in W^2_q(\mathbb{R}^N_+)$ ならば $\tilde{\mathbf{u}}_+ \in W^2_q(\mathbb{R}^N)$ が各 $t$ について成立し，$\|\tilde{\mathbf{u}}_+(\cdot, t)\|_{W^2_q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\mathbf{u}_+(\cdot, t)\|_{W^2_q(\mathbb{R}^N_+)}$ が成立する．時間局所解の一意存在を求めるときの時間 $T > 0$ に対し，$\int_0^T \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}_+(\cdot, s)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N)} ds \leq \epsilon << 1$ が常に成立するとして逐次近似するとすれば，$\xi \mapsto x(\xi, t)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の 1 対 1 上への写像で適当な正則性をもつと仮定してよい．ここで，$x$ は Cauchy 問題

$$\frac{d}{dt}x(\xi, t) = \tilde{\mathbf{u}}_+(x, t), \quad x(\xi, 0) = \xi \in \mathbb{R}^N.$$

の解とする．$\rho_+$ を

$$\partial_t \rho_+ + \mathrm{div}\,(\rho_+ \tilde{\mathbf{u}}_+) + \rho_+ \tilde{G} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

なる全空間での方程式の解として構成する．ただし，

$$\tilde{G} = \frac{1}{1 + H_N}\{\partial_N(\sum_{j=1}^{N-1} H_j \tilde{u}_{+j} + H_0) + (\partial_N H_N)\tilde{u}_{+N} - \sum_{j=1}^{N-1} H_j \partial_j \tilde{u}_{+j}\}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_+ = (\tilde{u}_{+1}, \ldots, \tilde{u}_{+N})$$

とおいた．$J(\xi, t) := \det \frac{\partial x}{\partial \xi}$ とおくと，

$$\begin{aligned} &\partial_t J(\xi, t) = (\mathrm{div}\, \tilde{\mathbf{u}}_+)(x(\xi, t), t) J(\xi, t), \\ &\partial_t(\rho_+(x(\xi, t), t) J(\xi, t)) = (\partial_t \rho_+ + \mathrm{div}\,(\rho_+ \tilde{\mathbf{u}}_+))(x(\xi, t), t) J(\xi, t) = -\rho_+(x(\xi, t), t) J(\xi, t) \tilde{G}(x(\xi, t), t), \end{aligned}$$

よって

$$\rho(x(\xi, t), t) = (\rho_{*+} + \rho_{0+}(\xi)) J(\xi, t)^{-1} e^{\int_0^t \tilde{G}(x(\xi, s).s)\, ds}.$$

また $J(\xi, t) = e^{\int_0^t (\mathrm{div}\, \tilde{\mathbf{u}}_+)(x(\xi, s), s)\, ds}$ と求まるから，$x(\xi, t) = \xi + \int_0^t \tilde{\mathbf{u}}_+(x(\xi, s), s)\, ds$ の逆像を $\xi = \xi(x, t)$ として，

$$\rho_+(x, t) = (\rho_{*+} + \rho_{0+}(\xi)) e^{\int_0^t (G(x(\xi, s).s) - (\mathrm{div}\, \tilde{\mathbf{u}}_+)(x(\xi, s), s))\, ds}|_{\xi = \xi(x, t)}$$

を得る．これを方程式に代入し，非線形部分を右辺に回して，$\mathrm{J} \neq 0$ の時は次の方程式系を得る．

$$\begin{cases} \rho_{*+}\partial_t \mathbf{u}_+ - \mathrm{Div}\, \mathbf{S}_+ = \mathbf{f}_+ & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \times (0, T), \\ \rho_{*-}\partial_t \mathbf{u}_- - \mathrm{Div}\, \mathbf{S}_- = \mathbf{f}_-, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{u}_- = f_{0-} = \mathrm{div}\, \mathbf{f}_{0-} & \text{in } \mathbb{R}^N_- \times (0, T), \\ [[\mathbf{Sn}]] - \sigma(\Delta' h)\mathbf{n} = \mathbf{g}, \quad [[\mathbf{u}']] = 0, \quad [[\rho^{-1}\mathbf{n} \cdot \mathbf{Sn}]] = g_0, & \text{on } \mathbb{R}^N_0 \times (0, T), \\ \partial_t h - \Big(\dfrac{\rho_{*-}}{\rho_{*-} - \rho_{*+}} u_{-N} - \dfrac{\rho_{*+}}{\rho_{*-} - \rho_{*+}} u_{+N}\Big) = g_{N+1} & \text{on } \mathbb{R}^N_0 \times (0, T), \end{cases} \tag{6}$$

$\boxed{\texttt{l1}}$

$$\begin{cases} \kappa_{*+}\partial_t \theta_+ - d_{*+}\Delta\theta_+ = f_{\tau+} & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \times (0, T), \\ \kappa_{*-}\partial_t \theta_- - d_{*-}\Delta\theta_- = f_{\tau-} & \text{in } \mathbb{R}^N_- \times (0, T), \\ [[\theta]] = 0, \quad [[d_* \partial_N \theta]] = g_\tau & \text{on } \mathbb{R}^N_0 \times (0, T), \end{cases} \tag{7}$$

$\boxed{\texttt{h1}}$

$$(\mathbf{u}_\pm, \theta_\pm)|_{t=0} = (\mathbf{u}_{0\pm}, \theta_{0\pm}) \quad \text{in } \mathbb{R}^N_\pm, \quad h|_{t=0} = h_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N_0. \tag{8}$$

$\boxed{\texttt{h2}}$

ただし, $\mathbf{u}'_\pm = (u_{\pm 1}, \ldots, u_{\pm N-1})$, $\Delta' h = \sum_{j=1}^{N-1} \partial_j^2 h$, $\kappa_{*+} = \rho_{*+}\kappa_{v+}(\rho_{*+}, \theta_{*+})$, $d_{*+} = d_+(\rho_{*+}, \theta_{*+})$, $\kappa_{*-} = \rho_{*-}\kappa_{v-}(\theta_{*-})$, $d_{*-} = d(\theta_{*-})$, $\sigma$ は正定数,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_+ &= \mu_+(\rho_{*+}, \theta_{*+})\mathbf{D}(\mathbf{u}_+) + (\lambda_+(\rho_{*+}, \theta_{*+}) - \mu_+(\rho_{*+}, \theta_{*+}))\mathrm{div}\, \mathbf{u}_+ \mathbf{I}, \\
\mathbf{S}_- &= \mu_-(\theta_{*-})\mathbf{D}(\mathbf{u}_-) - \pi_- \mathbf{I}.
\end{aligned}
$$

また $\mathrm{J} = 0$ の時は次を得る.

$$
\begin{cases}
\rho_{*+}\partial_t \mathbf{u}_+ - \mathrm{Div}\, \mathbf{S}_+ = \mathbf{f}_+ & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \times (0,T), \\
\rho_{*-}\partial_t \mathbf{u}_- - \mathrm{Div}\, \mathbf{S}_- = \mathbf{f}_-, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{u}_- = f_{0-} = \mathrm{div}\, \mathbf{f}_{0-} & \text{in } \mathbb{R}^N_- \times (0,T), \\
[[\mathbf{S}\mathbf{n}]] - \sigma(\Delta' h)\mathbf{n} = \mathbf{g}, \quad [[\mathbf{u}]] = 0, & \text{on } \mathbb{R}^N_0 \times (0,T), \\
\partial_t h - u_{+N} = g_{N+1} & \text{on } \mathbb{R}^N_0 \times (0,T),
\end{cases}
\tag{9}
$$

l1

$$
\begin{cases}
\kappa_{*+}\partial_t \theta_+ - d_{*+}\Delta\theta_+ = f_{\tau +} & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \times (0,T), \\
\kappa_{*-}\partial_t \theta_- - d_{*-}\Delta\theta_- = f_{\tau -} & \text{in } \mathbb{R}^N_- \times (0,T), \\
[[\theta]] = 0, \quad [[d_* \partial_N \theta]] = 0 & \text{on } \mathbb{R}^N_0 \times (0,T),
\end{cases}
\tag{10}
$$

h1

$$
(\mathbf{u}_\pm, \theta_\pm)|_{t=0} = (\mathbf{u}_{0\pm}, \theta_{0\pm}) \quad \text{in } \mathbb{R}^N_\pm, \quad h|_{t=0} = h_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N_0. \tag{11}
$$

h2

**Theorem 1.** *The maximal $L_p$-$L_q$ regularity result for the linearized equations yields that for given time $T$ there exists a small number $\epsilon$ such that initial data satisfy the compatibility condition and smallness condition:*

$$
\|\theta_{0\pm}\|_{B_q^{2(1-1/p)}(\mathbb{R}^N_\pm)} + \|\mathbf{u}_{0\pm}\|_{B_p^{2(1-1/p)}(\mathbb{R}^N_\pm)} + \|\rho_{0+}\|_{W_q^1(\mathbb{R}^N_+)} + \|h_0\|_{B_{q,p}^{3-1/p}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \epsilon
$$

*then, the local wellposedness holds in the following solution classes:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_\pm, \theta_\pm \in L_p((0,T), W_q^2(\mathbb{R}^N_\pm)) \cap W_p^1((0,T), L_q(\mathbb{R}^N_\pm)), \\
&\rho_+ \in W_p^1((0,T), L_q(\mathbb{R}^N_+)) \cap L_p((0,T), W_q^1(\mathbb{R}^N_+)).
\end{aligned}
$$