半線形楕円型方程式の群不変解の存在

梶木屋 龍治　(佐賀大学理工学部)

次の楕円型方程式の対称解及び非対称解について考える.

$$-\Delta u = f(x)u^p, \quad u > 0 \quad (x \in \Omega), \qquad u = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{1}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域であり, $N = 2$ のとき $1 < p < \infty$ とし, $N \geq 3$ のとき $1 < p < (N+2)/(N-2)$ とする. $f \in L^\infty(\Omega)$ とし, $f(x)$ は符号を変えても良いものとする. $O(N)$ を直交群とし, G をその閉部分群とする. すべての $g \in G$ に対して, $g(\Omega) = \Omega$ が成り立つとき, Ω を G 不変領域と呼ぶ. すべての $g \in G$, $x \in \Omega$ に対して, $f(gx) = f(x)$ が成り立つとき, $f(x)$ を G 不変関数と呼ぶ. 同様にして G 不変解を定義する.

目的. $H \subset G \subset O(N)$ なる二つの閉部分群 G,H に対して, H 不変であり, かつ G 不変でない正値解の存在を示す.

レイリー商 $R(u)$ とその定義域 $D(R)$, 及びネハリ多様体 $\mathcal{N}$, また G 不変な関数空間を以下に定義する.

$$R(u) := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\left(\int_\Omega f(x)|u|^{p+1} dx\right)^{-2/(p+1)},$$

$$D(R) := \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega f(x)|u|^{p+1} dx > 0\}.$$

$$\mathcal{N} := \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 - f(x)|u|^{p+1}) dx = 0\}.$$

$$H_0^1(\Omega, G) := \{u \in H_0^1(\Omega) : u \text{ は } G \text{ 不変関数}\},$$

$$D(R, G) := D(R) \cap H_0^1(\Omega, G), \quad \mathcal{N}(G) := \mathcal{N} \cap H_0^1(\Omega, G),$$

さらに大域的最小エネルギー R_0, G 不変最小エネルギー R_G を次式で定義する.

$$R_0 := \inf\{R(u) : u \in D(R)\} = \inf\{R(u) : u \in \mathcal{N}\}.$$

$$R_G := \inf\{R(u) : u \in D(R, G)\} = \inf\{R(u) : u \in \mathcal{N}(G)\}.$$

$u \in \mathcal{N}$ かつ $R(u) = R_0$ のとき, u を大域的最小エネルギー解と呼ぶ. そのような解は存在して (1) の正値解になる. また, $u \in \mathcal{N}(G)$ かつ $R(u) = R_G$ のときに u を G 不変最小エネルギー解と呼ぶ. G の不動点集合 $\mathrm{Fix}(G)$ を次により定義する.

$$F = \mathrm{Fix}(G) := \{x \in \mathbb{R}^N : gx = x \ (\forall g \in G)\}.$$

このとき F は $\mathbb{R}^N$ の線形部分空間になる. $F = \mathrm{Fix}(G)$ から最も遠い $\overline{\Omega}$ の点の集合を Γ で表す. 点 $x \in \mathbb{R}^N$ を通る G の軌道を $G(x) := \{gx : g \in G\}$ により定義する.

仮定 1. Ω と $f(x)$ は G 不変であり, H, G, $f(x)$ は次の仮定 (i), (ii) を満たすものとする.

(i) H と G は $H \subset G$ を満たす $O(N)$ の閉部分群であり, すべての $x \in \Gamma$ に対して, $H(x) \subsetneq G(x)$ を満たすものとする.

(ii) 次の (A) または (B) のいずれかを仮定する.

(A) $f(x) \le 0$ $(x \in \Omega \setminus \Gamma_\varepsilon)$ であり, $\{x \in \Gamma_\varepsilon : f(x) > 0\}$ の $\mathbb{R}^N$ ルベーグ測度は正である. ただし Γ_ε は Ω 内での Γ の ε 近傍を表し, $\varepsilon > 0$ は十分小さく取る.

(B) $f(x) = f_0(x)^\lambda$ とし, $\lambda > 0$ は十分大きい. ここで $f_0 \in C(\overline{\Omega})$ は G 不変関数であり, $0 \le f_0(x) < \max_{y\in\Gamma} f_0(y) \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma)$ を満たすものとする.

定理 1. 仮定 1 のもとに, H 不変最小エネルギー解は, G 不変でない. 従って, 「G 不変正値解」と「H 不変であり G 不変でない正値解」の両方が存在する.

以下の例では, 簡単のため $f(|x|) = f_0(|x|)^\lambda$ は球対称関数とし, $f_0(r)$ は, $r = |x|$ に関して狭義単調増加, $\lambda > 0$ は十分大きいものと仮定する. 従って以下の例では, 仮定 (B) が成り立つ. また, 領域 Ω の中心は座標原点とする.

例 1. Ω を正三角形とする. その対称軸を一つ取る. この軸に関して軸対称最小エネルギー解は, $120°$ 回転不変性を持たない. これを証明する. H をこの軸に関する対称変換の作る群と定義する. G は軸対称変換と $120°$ 回転の合成の作る群 (すなわち 3 次の正 2 面体群 D_3) とする. このとき G の不動点集合は原点 $\{0\}$ のみからなる. 原点から最も遠い点の集合 Γ は三角形の 3 つの頂点からなる. 従って $H(x) \subsetneq G(x)$ $(x \in \Gamma)$ が成り立ち, H 不変最小エネルギー解は G 不変でない.

例 2. Ω を正方形 $\Omega := \{(x,y) : |x| < 1,\ |y| < 1\}$ とする. 偶関数最小エネルギー解は, x 軸対称でなく, y 軸対称でなく, $90°$ 回転対称でない. 大域的最小エネルギー解は, 偶関数でなく, x 軸対称でなく, y 軸対称でなく, $90°$ 回転対称でない.

例 3. 角度 $2\pi/n$ 回転の行列が作る群を G_n とする. Ω を正 n 角形とする. このとき Ω は G_n 不変である. n の約数を $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_d = n$ とする. G_{n_i} 不変最小エネルギー解を u_{n_i} とする. このとき各 u_{n_i} は互いに equivalent でない. ここで 2 つの解 u, v が equivalent であるとは, ある直交行列 $g \in O(2)$ があり, $u(gx) = v(x)$ が成り立つことを言う. 従って, 例えば Ω が正 6 角形のとき, G_1, G_2, G_3, G_6 不変の最小エネルギー解, u_1, u_2, u_3, u_6, は違う解であり, どのような直交変換によっても移りあわない.

例 4. $O(N)$ の閉部分群 H は, 単位球面 S^{N-1} 上の変換群になる. $x \in S^{N-1}$ に対して, $H(x) = S^{N-1}$ となるとき, H は単位球面上で推移的であると言われる. Ω を球 $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < A\}$ または, 円環 $\{x \in \mathbb{R}^N : a < |x| < A\}$ とする. H が推移的でないとき, H 不変最小エネルギー解は, 球対称でない. この場合, $G = O(N)$ と取る. このとき, $\mathrm{Fix}(G) = \{0\}$ となり, $\Gamma = \{x : |x| = A\}$ となる. H が推移的でないとき, $H(x) \subsetneq G(x) = \{x : |x| = A\}$ $(x \in \Gamma)$ が成り立つ. よって, H 不変最小エネルギー解は, 球対称でない.