２次元ゲルファント問題の解の爆発列に付随する線形化固有値の挙動とその応用

大塚　浩史　(金沢大学理工研究域数物科学系)*

本研究内容は、Francesca Gladiali 氏（Univ. Sassari）、Massimo Grossi 氏（Univ. Roma “La Sapienza”）との共同研究に基づく。

ゲルファント問題の解の爆発：　境界が滑らかな $\mathbf{R}^2$ の有界領域 Ω、非負定数 λ に対し、境界値問題

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{1}$$

は、しばしば Gel’fand 問題と呼ばれるが、多くの由来を持ち深く研究されている。特に $\lambda \downarrow 0$ での解の振る舞いが詳細に調べられている：

定理 1 (既存の結果 [7])**.** $\lambda_n \downarrow 0$ を満たす列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と $\lambda = \lambda_n$ における (1) の解 u_n を一つ固定する。このとき、$\Sigma_n := \lambda_n \int_\Omega e^{u_n} dx = O(1)$、$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow \infty$ であれば、自然数 $m \in \mathbf{N}$、集合 $\mathscr{S} = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\} \subset \Omega$、$\{u_n\}$ の部分列（同じ記号で表す）が存在し、この部分列に対し $\Sigma_n \longrightarrow 8\pi m$ であり、$\overline{\Omega}\backslash\mathscr{S}$ 上局所一様に次のように収束する：

$$u_n(x) \longrightarrow u_\infty(x) := 8\pi \sum_{j=1}^m G(x, \kappa_j).$$

ここで $G(x,y)$ は、$-\Delta$ の Dirichlet 条件での Green 関数である。また $\mathscr{S}$ は爆発集合と呼ばれ、$(\kappa_1, \cdots, \kappa_m) \in \Omega^m$ は次の関数 H^m（同じ強さの m 点渦の Hamiltonian に相当する）の臨界点である：

$$H^m(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m R(x_i) + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le m,\, i\ne j} G(x_i, x_j).$$

但し、$R(x) = K(x,x)$、$K(x,y) = G(x,y) - \frac{1}{2\pi}\log|x-y|^{-1}$ である。

　仮定される解の列は、H^m の臨界点が適当な条件（非退化性など）を満たす場合や、領域が適当な性質を満たす場合などに構成されることが知られている（[1, 2, 3] など）。ここでは、この爆発挙動の詳細を報告する。

ゲルファント問題の線形化固有値問題：　$\lambda = \lambda_n$ でのゲルファント問題 (1) の解 u_n に関する線形化固有値問題は

$$-\Delta v = \mu\lambda_n e^{u_n} v \quad \text{in } \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{2}$$

に帰着する。固有値 μ が $\mu < 1$ であることが、対応する線形化作用素の固有値が負であることに相当する。(2) の固有値は $\mu_n^1 \le \mu_n^2 \le \mu_n^3 \le \ldots$ と定まるが、以前の研究で、次

於熊本大学応用解析セミナー (平成２７年２月７日 (土))
本研究は科研費 (課題番号:22540231) の助成を受けたものである。
* 〒 920-1192 石川県金沢市角間町　金沢大学 理工研究域 数物科学系
e-mail: ohtsuka@se.kanazawa-u.ac.jp

のことを示した：行列 D を対角行列 $\mathrm{diag}[d_1, d_1, \cdots, d_m, d_m]$ とし、その対角成分 d_j は次で与えられているとする：

$$d_j = \frac{1}{8}\exp\left\{4\pi R(\kappa_j) + 4\pi \sum_{1\le i\le m, i\ne j} G(\kappa_j, \kappa_i)\right\} (>0).$$

定理 2 ([6]). 定理1で定まる部分列に対し、$n \to +\infty$ において

$$\mu_n^k = -\frac{1}{2}\frac{1}{\log\lambda_n} + o\left(\frac{1}{\log\lambda_n}\right)(\longrightarrow 0), \quad 1 \le k \le m \text{ のとき},$$
$$\mu_n^k = 1 - 48\pi\eta^{(2m+1-s)}\lambda_n + o(\lambda_n)(\longrightarrow 1), \quad m+1 \le k \ (=: m+s) \le 3m \text{ のとき},$$
$$\mu_n^k > 1, \quad k \ge 3m+1 \text{ のとき}$$

ここで、$\eta^{(l)}$ $(l = 1, \cdots, 2m)$ は、行列 $D(\mathrm{Hess}H^m)D$ の第 l 固有値である。

この結果は、[4] の $m = 1$ の場合の一般化であった。$1 \le k \le m$ の場合を精密化した：

定理 3 ([5]). 定理1で定まる部分列、各 $k \in \{1, \ldots, m\}$ に対し次が成立する：

(i) $n \to +\infty$ において

$$\mu_n^k = -\frac{1}{2}\frac{1}{\log\lambda_n} + \left(2\pi\Lambda^k - \frac{3\log 2 - 1}{2}\right)\frac{1}{(\log\lambda_n)^2} + o\left(\frac{1}{(\log\lambda_n)^2}\right)$$

ここで Λ^k は、 成分が次で与えられる $m \times m$ 行列 (h_{ij}) の第 k 固有値である：

$$h_{ij} = \begin{cases} R(\kappa_i) + 2\sum_{\substack{1\le h\le m\\ h\ne i}} G(\kappa_h, \kappa_i), & i = j \text{ のとき}, \\ -G(\kappa_i, \kappa_j), & i \ne j \text{ のとき}, \end{cases}$$

(ii) v_n^k を、固有値問題 (2) の固有値 μ_n^k に対応する固有関数で $\|v_n^k\|_\infty = 1$ を満たすものとする。このとき、行列 (h_{ij}) の第 k 固有ベクトル $\mathfrak{c}^k = (c_1^k, .., c_m^k) \in [-1, 1]^m$ と部分列が存在し、$n \longrightarrow +\infty$ において $\overline{\Omega}\backslash\mathscr{S}$ 上局所一様に次のように収束する：

$$\frac{v_n^k}{\mu_n^k} \longrightarrow 8\pi\sum_{j=1}^m c_j^k G(\cdot, \kappa_j)$$

この結果の行列 (h_{ij}) は、定理2の D 同様、1点爆発を扱う [4] では顕在化しないものであり、多点爆発特有のものである。(i) は、固有関数の尺度変換に関する新たな「観察」から得られた。(ii) ような固有関数の挙動自体は定理2の証明でも用いられたが、(i) により $\mathfrak{c}^k$ が特徴付けられた。(ii) から、爆発点以外では v_n^k は0に収束することが分かるが、c_j^k が v_n^k の爆発点 κ_j 近くでの尺度変換により得られることから、$c_j^k \ne 0$ のとき v_n^k が κ_j の周りで0に近づかない（「ピーク」を形成する）ことが分かる。すなわち、行列 (h_{ij}) の固有ベクトルを調べることで、固有関数の「ピーク」の数が分かることになる。

参考文献

[1] Baraket, S., Pacard, F.: Construction of singular limits of a semilinear elliptic equation in dimension 2. Calc. Var. PDE **6**, 1–38 (1998).

[2] del Pino, M., Kowalczyk, M., Musso, M.: Singular limits in Liouville-type equations. Calc. Var. PDE **24**, 47–81 (2005).

[3] Esposito, P., Grossi, M., Pistoia A.: On the existence of blowing-up solutions for a mean field equation. Ann. Inst. H. Poincaré AN **22**, 227-257 (2005)

[4] Gladiali, F., Grossi, M.: On the spectrum of a nonlinear planar problem. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26**, 728–771 (2009)

[5] Gladiali, F., Grossi, M., Ohtsuka, H.: Morse indices of multiple blow-up solutions to the Gel'fand problem, Annali di Matematica Pure ed Applicata, 電子出版済 (DOI:10.1007/s10231-014-0453-z), 2014, 15pages.

[6] Gladiali, F., Grossi, M., Ohtsuka, H., Suzuki, T.: Morse indices of multiple blow-up solutions to the Gel'fand problem, Commun. P. D. E., 39 (2014) 2028–2063.

[7] Nagasaki, K., Suzuki, T.: Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalues problems with exponentially dominated nonlinearities. Asymptotic Analysis **3**, 173–188 (1990)