積分条件付反応拡散方程式の定常解の大域的構造について

辻川　亨

宮崎大学工学教育研究部

自然界で観察される様々なパターンについて、その形成メカニズムの解析が反応拡散方程式を用いて行われている。また、生物の集合メカニズムの解明に関して、1970 年代から移流項を持つ反応拡散方程式の 1 つである Keller-Segel 型の方程式が扱われている。一方、次のような増殖項を持つ移流拡散方程式の研究も行われてきた (e. g. [7], [8])。

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{D}\nabla\left\{\nabla u - \alpha u\nabla v\right\} + f(u), & \text{in } \ \Omega\times\mathbb{R}_+, \\ v_t = d\Delta v + u - v, & \text{in } \ \Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u_\nu(x,t) = 0, \ v_\nu(x,t) = 0, & \text{on } \ \partial\Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u(\,\cdot\,,0) = u_0 \geq 0, \ \ v(\,\cdot\,,0) = v_0 \geq 0, & \text{in } \ \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする。増殖項 $f(u)$ がない場合、解の爆発などの興味ある問題について多くの研究がある。一方、増殖項のある問題については時間－空間に関する動的なパターンの存在などが数値的に知られている (e. g. [3], [4], [1]). このようなパターンの出現メカニズムを解明するために定常解の存在及びその安定性を含めた解の大域的構造を解明することは重要な問題である。しかし、一般的にパラメータ依存の大域的解構造を示すことは難しい問題である。勿論、増殖項 $f(u)$ の形に依存して解構造は変化する (e. g. [2], [6])。ここでは典型的な増殖項の 1 つである双安定系 $f(u) = u(1-u)(u-a)$ $(0 < a < 1/2$) を扱う。(1) の定常問題は

$$\begin{cases} \mathcal{D}\nabla\left\{\nabla u - \alpha u\nabla v\right\} + f(u) = 0, & x\in\Omega, \\ d\Delta v + u - v = 0, & x\in\Omega, \\ u\geq 0, \ v\geq 0, & x\in\Omega, \\ u_\nu(x) = v_\nu(x) = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

となる。

大域的解構造を求めるための第一段階として、ある種の極限形を考察する。すなわち、パラメータ $\mathcal{D}$ を無限大にした場合、形式的に得られる次の方程式である。

$$\begin{cases} \nabla\{\nabla u - \alpha u\nabla v\} = 0, & x\in\Omega, \\ d\Delta v + u - v = 0, & x\in\Omega, \\ u\geq 0, \ v\geq 0, & x\in\Omega, \\ u_\nu(x) = v_\nu(x) = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

そして

$$\int_\Omega f(u)\ dx = 0. \tag{4}$$

2 つの方程式系の関係について、次の定理が成り立つ。

定理 1 $(N\leq 3)$　$\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_n = \infty$ を満たす任意の正の数列 $\{\mathcal{D}_n\}$ に対して、$\mathcal{D} = \mathcal{D}_n$ としたとき (2) の解を $(u_n,\ v_n)$ とする。このとき、$\{\mathcal{D}_n\}$ のある部分列 $\{\mathcal{D}_{n'}\}$ と (3), (4) の解 $(u_\infty,\ v_\infty)$ が存在し、かつ

$$\lim_{n'\to\infty}(u_{n'},\ v_{n'}) = (u_\infty,\ v_\infty) \quad in\ C^1(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega}) \tag{5}$$

が成り立つ。

したがって、十分大きな D に対して、(2) の定常解の解構造を求めるためには (3), (4) を解析すれば十分である。

まず、空間次元が 1 の場合を扱う。このとき、(3) の第 1 式から、$u(x)$ は正の任意定数 E を用いて $u = Ee^{\alpha v}$ となる。したがって、$\Omega = (0,1)$, $g(v,E) = Ee^{\alpha v} - v$ とするとき、(3), (4) は次のように書き換えられる。

$$\begin{cases} dv_{xx} + g(v,E) = 0, & x \in (0,1), \\ v_x(0) = v_x(1) = 0, & \\ v \geq 0, & x \in (0,1), \end{cases} \tag{6}$$

そして

$$\int_0^1 f(Ee^{\alpha v})\ dx = 0. \tag{7}$$

そこで、(6), (7) の解は $(v(x,\ d,\ E),\ d,\ E)$ と表示する。 また、すべての解は単調な解を用いて表示できることから、単調増加な解のみを扱う。

まず、積分条件のない問題 (6) について考える。(6) の正値定数解について次の補題が成り立つ。

補題 2 ある正定数 $\hat{E}$ が存在する。$0 < E < \hat{E}$ に対して，(6) は 2 つの正値定数解 $v_*(E),\ v^*(E)$ を持ち、$v_*(E)$ と $v^*(E)$ は $v_*(E) < v^*(E)$ を満たし、それぞれ E に関して単調増加、単調減少関数である。

(6) の定常解について、分岐理論により次の補題が成り立つ。

補題 3 $0 < E < \hat{E}$ に対して、$\lim_{E\to 0} d^*(E) = \infty,\ \lim_{E\to\hat{E}} d^*(E) = 0$ を満たす単調減少関数 $d^*(d)$ が存在する。このとき、$0 < E < \hat{E},\ 0 < d < d^*(E)$ に対して、(6) の解 $v(x,\ d,\ E)$ が存在して

$$\lim_{d\to d^*(E)} v(x,\ d,\ E) = v^*(E), \quad \lim_{d\to 0} v(x,\ d,\ E) = v^B(x,\ E) = \begin{cases} v_*(E) & 0 \leq x < 1 \\ \overline{v}(E) & x = 1 \end{cases} \tag{8}$$

が成り立つ。ここで、$\overline{v}(E)$ は $v^*(E) < \overline{v}(E)$ を満たすある定数である。

$\Lambda := \{(d,\ E) \mid 0 < E < \hat{E},\ 0 < d < d^*(E)\}$ とするとき、Shi ([5]) 等の結果を応用するとパラメータ領域 Λ 以外では非定数解が存在しないことが示される。また、(6), (7) の単調増加な解の全体を $\Gamma := \{(v(x,\ d,\ E),\ d,\ E) \mid (d,\ E) \in \Lambda$に対して $v(x,\ d,\ E)$ は (6), (7) の解である $\}$ とするとき、定常解の存在に関する次の定理が成り立つ。

定理 4 $1/\alpha < a,\ 1$ のとき、ある定数 $E_a,\ E_1\ (E_1 < E_a < \hat{E})$ と区間 $(E_1,\ E_a)$ で定義された関数 $d(E)$ が存在して、$(v(x,\ d(E),\ E),\ d(E),\ E)\ \in \Gamma$ となる。その上、

$$\lim_{E\to E_1} v(x,\ d(E),\ E) = v^*(E_1), \quad \lim_{E\to E_a} v(x,\ d(E),\ E) = v^*(E_a) \tag{9}$$

が成り立つ。

定理 5 $a < 1/\alpha < 1$ のとき、ある定数 $E_a,\ E_1 < \hat{E}$ と区間 $(E_1,\ E_a)$ 又は区間 $(E_a,\ E_1)$ で定義された関数 $d(E)$ が存在して、$(v(x,\ d(E),\ E),\ d(E),\ E)\ \in \Gamma$ となる。その上、

$$\lim_{E\to E_1} v(x,\ d(E),\ E) = v^*(E_1), \quad \lim_{E\to E_a} v(x,\ d(E),\ E) = v^B(x,\ E_a) \tag{10}$$

が成り立つ。

定理 6 $1/\alpha > a,\ 1$ のとき、ある定数 $E_a,\ E_1\ (\hat{E} > E_1 > E_a)$ と区間 $(E_a,\ E_1)$ で定義された関数 $d(E)$ が存在して、$(v(x,\ d(E),\ E),\ d(E),\ E)\ \in \Gamma$ となる。その上、

$$\lim_{E \to E_1} v(x,\ d(E),\ E) = v^B(x,\ E_1), \quad \lim_{E \to E_a} v(x,\ d(E),\ E) = v^B(x,\ E_a) \tag{11}$$

が成り立つ。

また、非定数定常解の非存在関連して次の定理を得た。

定理 7 もし非定数定常解 $v(x,\ d,\ E) \in \Gamma$ が存在すれば、十分小さな $0 < E$ に対して関係式

$$(a+1)\ \cosh \frac{1}{\sqrt{d}} > -\frac{1}{\alpha} \log E \tag{12}$$

が成り立つ。

以上の内容を報告する予定である。また、定常解の安定性、分岐構造を数値的に求めるソフト AUTO を用いた、定常解の大域的分岐構造及び 2 次分岐として出現する周期的な解の存在についても言及したい。

References

[1] S.-I. Ei, H. Izuhara and M. Mimura, Spatio-temporal oscillations in the Keller-Segel system with logistic growth, *Physica D*, **277**, 1-21, 2014.

[2] C. Gai, Q. Wang and J. Yan, Qualitative analysis of stationary Keller-Segel chemotaxis models with logistic growth, preprint.

[3] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai, T. Tsujikawa, Spatial pattern in a chemotaxis-Diffusion-Growth model, *Physica D*, **241**, 1629-1639, 2012.

[4] K. J. Painter and T. Hillen, Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model, *Physica D*, **240**, 363-375, 2011.

[5] J. Shi, Semilinear Newmann boundary value problems on a rectangle, *Trans. AMS*, **354**, 3117-3154, 2002.

[6] T. Tsujikawa, K. Kuto, Y. Miyamoto and H. Izuhara, Stationary solutions for some shadow system of the Keller-Segel model with logistic source, to appear in DCDS-S, 2014.

[7] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Physica A*, **230**, 499-543, 1996.

[8] D. E. Woodward, R. Tyson, M. R. Myerscough, J. B. Murray, E. O. Budrene, B. O. Berg, Spatio-temporal patterns generated by Salmonella typhimurium, *Biophys.*, **68**, 2181-2189, 1995.