シュレディンガー方程式のある非線形系の時間大域解の存在と漸近挙動

中村能久
熊本大学大学院自然科学研究科

1. 序

本講演は下村明洋氏 (東大), 利根川聡氏 (日大) との共同研究に基づく. 次の空間 1 次元における非線形シュレディンガー方程式の連立系の時間大域解の存在とその漸近挙動に関して考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \dfrac{1}{2m_1}\partial_x^2 u_1 = F_1(u_1, u_2), \\ i\partial_t u_2 + \dfrac{1}{2m_2}\partial_x^2 u_2 = F_2(u_1, u_2), \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, u_1 と u_2 は (t, x) に関する未知の複素数値関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, m_1 と m_2 は正の定数である. また非線形項は u_1, u_2 に関する 3 次の多項式であり, 次で与えられる.

$$F_j(u_1, u_2) = g_j(u_1, u_2)u_j + N_j(u_1, u_2),$$

ここで

$$g_j(u_1, u_2) = \mu_{j,1}|u_1|^2 + \mu_{j,2}|u_2|^2 + \delta_{m_1,m_2}\mu_{j,3}(u_1\bar{u}_2 + \bar{u}_1 u_2), \tag{1.2}$$

$$N_j(u_1, u_2) = \sum_{\alpha; |\alpha|=3, (\mathrm{a1}), (\mathrm{a2})} \lambda_{j,\alpha} u_1^{\alpha_1} \bar{u}_1^{\alpha_2} u_2^{\alpha_3} \bar{u}_2^{\alpha_4}, \tag{1.3}$$

である. $\delta_{p,q}$ はクロネッカーのデルタであり, $\lambda_{j,\alpha} \in \mathbb{C}$, $\mu_{j,k} \in \mathbb{R}$ である. ただし $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$ であり, 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ は次の関係式を満たしているとする.

$$(\alpha_1 - \alpha_2)m_1 + (\alpha_3 - \alpha_4)m_2 \neq m_j, \tag{a1}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)m_1 + (\alpha_3 - \alpha_4)m_2 \neq 0. \tag{a2}$$

散乱問題とは, 与えらえた自由シュレディンガー方程式の解に, 時刻無限大において何らかノルムの意味で収束する摂動付シュレディンガー方程式の解を構成すること (終値問題), あるいは与えられた初期値に対して得られた摂動付方程式の解の時刻無限大における収束先である自由シュレディンガー方程式の解の存在を示すこと (初期値問題の解の漸近挙動) である. 単独の非線形シュレディンガー方程式に関しては, 空間 1 次元の場合, 非線形項がゲージ不変性を持つ 3 次の単項式の和ならば, 漸近自由にならない事実が知られている ([1, 13] 参照) (この場合は長距離散乱理論により, 修正波動作用素が存在する事実が知られている. [11] 参照). これに対して, 非線形項がゲージ不変性を持たない 3 次の単項式の和ならば, 漸近自由解が存在する ([9, 5, 12] 参照). 我々は [10] に基づき, 空間 1 次元における非線形シュレディンガー方程式の連立系を考える. (近年, 非線形光学に由来する空間 2 次元におけるある非線形シュ

レディンガー方程式系の散乱理論に関する研究が盛んである. [2, 3, 6, 7] 参照).

2. 主定理

ここでは の終値問題を考える.

定理 2.1 ([10])**.** $1/2 < b < 3/2$ に対して, $u_{1+}, u_{2+} \in H^{0,2} \cap \dot{H}^{-b}$, とし, $\|u_{1+}\|_{H^{0,2}\cap\dot{H}^{-b}} + \|u_{2+}\|_{H^{0,2}\cap\dot{H}^{-b}}$ が十分小さいと仮定する. さらに $m_1 = m_2$ ならば, "$\mu_{1,3} = \mu_{2,3} = 0$" または "$k = 1, 2, 3$ に対して $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$" を仮定する. このとき, 方程式系 (2) には次を満たすような解 (u_1, u_2) が一意に存在する.

$$\begin{aligned}&(u_1, u_2) \in C([0,\infty); L^2) \oplus C([0,\infty); L^2),\\ &\sup_{t\geq 1} t^{b/2}(\|(u_1(t), u_2(t)) - (u_{1a}(t), u_{2a}(t))\|_{L^2}\\ &\qquad + \|(u_1, u_2) - (u_{1a}, u_{2a})\|_{L^4([t,\infty);L^\infty)}) < \infty.\end{aligned}$$

ここで $j = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}u_{ja}(t,x) =&(U_{m_j}(t)e^{-im_j|x|^2/2t}e^{-iS_j(t,-i\nabla)}u_{j+})(x)\\ =&\left(\frac{m_j}{it}\right)^{1/2}\hat{u}_{j+}\left(\frac{m_j x}{t}\right)e^{im_j|x|^2/2t - iS_j(t, m_j x/t)},\\ S_j(t,x) =& g_j\left(\hat{u}_{1+}\left(\frac{m_1}{m_j}x\right), \hat{u}_{2+}\left(\frac{m_2}{m_j}x\right)\right)\log t\end{aligned}$$

で与えられる. さらに, 修正波動作用素

$$W_+ : (u_{1+}, u_{2+}) \mapsto (u_1(0), u_2(0))$$

が *well-defined* である.

負の時刻に対しても同様の結果が成り立つ.

証明は Strichartz 評価を利用した縮小写像の原理に基づく ([15] 参照). また非線形項の評価については, 質量共鳴条件から, 非線形項が自由解より速い減衰度を持つことに注意する ([5] 参照).

さらに初期値問題に関する話題も触れる予定である ([4, 14, 8] 参照).

References

[1] J.E. Barab, *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.

[2] M. Colin, T. Colin, M. Ohta, *Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **26** (2009), 2211–2226.

[3] N. Hayashi, C. Li and P.I. Naumkin, *On a system of nonlinear Schrödinger equations in 2D*, Differential Integral Equations, **24** (2011), 417–434.

[4] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.

[5] N. Hayashi, P.I. Naumkin, A. Shimomura and S. Tonegawa, *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two dimensions*, Electron. J. Differential Equations **2004** (2004), No. 62, 1–16.

[6] N. Hayashi, T. Ozawa and K. Tanaka, *On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Non Linéaire, **30** (2013), 661–690.

[7] S. Katayama, C. Li and H. Sunagawa, *A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D*, Differential Integral Equations, **27** (2014), 301–312.

[8] N. Kita and Y. Nakamura, *Large time behavior of small solutions to multi-component nonlinear Schrödinger equations related with spinor Bose-Einstein condensate*, preprint (2012).

[9] K. Moriyama, S. Tonegawa and Y. Tsutsumi, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equation with a nonlinearity of low degree in one or two dimensions*, Commun. Contemp. Math. **5** (2003), 983–996.

[10] Y. Nakamura, A. Shimomura and S. Tonegawa, *Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions to Some Nonlinear Systems of Schrödinger Equations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, to appear.

[11] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[12] A. Shimomura and S. Tonegawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one and two space dimensions*, Differential Integral Equations **17** (2004), 127–150.

[13] Y. Tsutsumi, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Doctral Thesis, University of Tokyo, 1985.

[14] T. Wada, *Long-range scattering for time-dependent Hartree-Fock type equation*, Nonlinear Anal. **48** (2002), 175–190.

[15] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 415–426.