Refined energy estimate and local well-posedness of fifth order dispersive equations on the torus

津川 光太郎（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

本講演では, 周期境界条件下における 5 階の分散型方程式 (5D) の初期値問題の時間局所的適切性を考える.

$$
\text{(5D)}\begin{cases} (\partial_t + \partial_x^5)u(t,x) = N(\partial_x^3 u, \partial_x^2 u, \partial_x u, u), & (t,x) \in (-T,T) \times \mathbf{T}, \\ u(0,x) = \varphi(x) \in H^s(\mathbf{T}). \end{cases}
$$

ただし $u(t,x)$ および $\varphi(x)$ は実数値関数とする. $s \in \mathbf{N}, s \geq s_0$ とし s_0 は十分大きいものとする. 非線形項は以下の多項式とする.

$$
N(\partial_x^3 u, \partial_x^2 u, \partial_x u, u) := \sum_{j=1}^{j_0} \lambda_j (\partial_x^3 u)^{a_j} (\partial_x^2 u)^{b_j} (\partial_x u)^{c_j} u^{d_j}.
$$

ただし, $j_0 \in \mathbf{N}, \lambda_j \in \mathbf{R}, a_j, b_j, c_j, d_h \in \mathbf{N} \cup \{0\}, p_j := a_j + b_j + c_j + d_j \geq 2$ とする. (5D) は, 可積分系である 5 次 KdV 方程式や 5 次修正 KdV 方程式を例として含んでいる.

$N = N(\partial_x u, u)$ の場合であればエネルギー法を用いることにより時間局所適切性を示すことが出来るが, 本問題の難しさは, 非線形項が $\partial_x^3 u$ や $\partial_x^2 u$ という高階の微分に依存する点である. $x \in \mathbf{R}$ の場合に対しては, Kenig-Ponce-Vega[1] により x の重み付き Sobolev 空間において (5D) は時間局所適切であることが示されている. その証明の鍵は方程式の線形部分に対する Kato type の smoothing estimate を用いて非線形項に含まれる高階の微分を回復する点である. 一方, $x \in \mathbf{T}$ の場合には Kato type の smoothing estimate が成立しないため, この手法を適用できない. この難しさは単なる技術的な問題によるものでは無く, 方程式が持つ本質的な性質によるものである. 実際, 以下の主結果で示される通り, (5D) は半線形分散型方程式であるにも関わらず, 非線形項の影響により放物型方程式の様な強い平滑化効果を持つ場合があり, これにより正または負の時間方向に対しては非適切になるのである. これは $x \in \mathbf{R}$ に対する結果とは大きく異なる点である.

主結果を述べる前に, 本研究で重要な役割を果たす汎関数 P_N を定義する. 上記で与えられた非線形項 N に対して

$$
\begin{aligned}
P_N(f) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \sum_{j=1}^{j_0} b_j \lambda_j (\partial_x^3 f)^{a_j} (\partial_x^2 f)^{b_j - 1} (\partial_x f)^{c_j} f^{d_j} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \frac{\partial}{\partial \omega_2} N(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega_0) \Big|_{(\omega_3,\omega_2,\omega_1,\omega_0) = (\partial_x^3 f, \partial_x^2 f, \partial_x f, f)} \, dx
\end{aligned}
$$

とする. さらに $P_N \equiv 0$, つまり任意の $f \in C^\infty(\mathbf{T})$ に対して $P_N(f) = 0$ のとき, 非線形項 N は non-parabolic resonance type であると言い, $P_N \not\equiv 0$ のとき parabolic resonance type であると言うこととする．主結果は以下の通りである．

定理 1 (non-parabolic resonance type)
$P_N \equiv 0, \varphi \in H^s(\mathbf{T})$ とする．このとき $T = T(\|\varphi\|_{H^{s_0}}) > 0$ および $u \in C((-T,T); H^s(\mathbf{T}))$ を満たす (5D) の解が存在する．

定理 2 (parabolic resonance type)
$P_N \not\equiv 0$ とする．

(i) $P_N(\varphi) > 0, \varphi \in H^s(\mathbf{T})$ とする．このとき $T = T(P_N(\varphi), \|\varphi\|_{H^{s_0}}) > 0$ および $u \in C([0,T); H^s(\mathbf{T})) \cap C^\infty((0,T) \times \mathbf{T})$ を満たす (5D) の解が存在する．
(ii) $P_N(\varphi) < 0, \varphi \in H^s(\mathbf{T}) \setminus C^\infty(\mathbf{T})$ とする．このとき, 任意の $T > 0$ に対して $u \in C([0,T); H^s(\mathbf{T}))$ を満たす (5D) の解は存在しない．
(i') $P_N(\varphi) < 0, \varphi \in H^s(\mathbf{T})$ とする．このとき $T = T(P_N(\varphi), \|\varphi\|_{H^{s_0}}) > 0$ および $u \in C((-T,0]; H^s(\mathbf{T})) \cap C^\infty((-T,0) \times \mathbf{T})$ を満たす (5D) の解が存在する．
(ii') $P_N(\varphi) > 0, \varphi \in H^s(\mathbf{T}) \setminus C^\infty(\mathbf{T})$ とする．このとき, 任意の $T > 0$ に対して $u \in C((-T,0]; H^s(\mathbf{T}))$ を満たす (5D) の解は存在しない．

注意　解の存在が成立する場合に対しては一意性と初期値に対する連続依存性も成立するがここでは省略をした．(i), (ii') より $P_N(\varphi) > 0$ なる初期値に対しては, 時間正の方向に適切でその解は強い平滑化効果を持ち, 負の方向には非適切である．つまり (5D) は放物型方程式の性質を持つ．同様に (i'), (ii) より $P_N(\varphi) < 0$ なる初期値に対しては, (5D) は, 時間を反転した放物型方程式の性質を持つ．

証明は, Kwon が [2] で用いた修正エネルギー法による．この手法を用いる際には, エネルギーにどのような補正項を付け加えれば上手くいくかが問題である．本証明では normal form reduction を利用することにより, 容易で自然に補正項を決定することが出来た．

参考文献

[1] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Higher-order nonlinear dispersive equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), no. 1, 157–166.
[2] S. Kwon, *On the fifth-order KdV equation: local well-posedness and lack of uniform continuity of the solution map*, J. Differential Equations **245** (2008), no. 9, 2627–2659.