Partial Regularity of Minimizers of $p(x)$-Growth Functionals with $1 < p(x) < 2$

薄羽 邦弘　(東京理科大学大学院 理工学研究科 数学専攻 博士後期課程 2 年)*

本講演では, 以下のような $p(x)$-エネルギータイプと呼ばれる汎関数を最小化する写像の正則性の問題を扱う.

$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega (A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u) D_\alpha u^i D_\beta u^j)^{p(x)/2} dx,$$

ここで, m, n を 2 以上の自然数とし, Ω は十分に滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持った $\mathbb{R}^m$ の有界開集合とする. さらに, $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $Du = ((D_\alpha u^i))_{1\le\alpha\le m, 1\le i\le n}$ は u の微分, 係数行列 $A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)$ と $1 < p(x) < 2$ は十分滑らかとする.

以下, 次で定義される汎関数を考える.

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x,u,Du) dx.$$

ここで, $f(x,u,Du) : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ は各変数に対して十分な滑らかさを持つとする. ある $q \ge p \ge 1$ と定数 $\Lambda \ge \lambda > 0$ に対して, 次の条件を満たすとする.

$$\lambda|\xi|^p \le f(x,u,\xi) \le \Lambda(1+|\xi|^2)^{q/2} \quad \forall(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}.$$

このような条件は $(p,q)-$growth, もしくは non-standard growth と呼ばれ, $p = q =$ 定数 のときは $p-$growth, もしくは standard growth と呼ばれている. この講演では non-standard growth のうち, 特に $p(x)-$growth と呼ばれる場合, すなわち次のような条件を満たす場合を考える.

$$\lambda|\xi|^{p(x)} \le f(x,u,\xi) \le \Lambda(1+|\xi|^2)^{p(x)/2} \quad \forall(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}.$$

$p(x)-$growth を仮定した下で, Ragusa-Tachikawa-Takabayashi[3, Theorem2.4] は 2013 年に以下のような汎関数に対する正則性の結果を得た.

$$\mathcal{E}_{p(x)}(u) = \int_\Omega (g^{\alpha\beta}(x) h_{ij}(u) D_\alpha u^i D_\beta u^j)^{p(x)/2} dx,$$

ここで, $(g^{\alpha\beta}(x))$ と $(h_{ij}(u))$ は一様楕円性を満たす対称行列とし, $h_{ij}(u)$ と $p(x)(\ge 2)$ は十分に滑らかとする.

この講演では, $p(x)$ の条件を $1 < p(x) < 2$ とした場合の $\mathcal{E}$ を最小化する写像の正則性について,得られた結果をご報告する.

まず, いくつか仮定を述べる. 定義域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ の点は $x = (x^1,...,x^m)$, $\mathbb{R}^n$ の点は $u = (u^1,...,u^n)$ と表すこととする. 係数行列 $(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u))$ は対称行列とし, 以下のような条件を仮定する.

(H1) ある定数 $\Lambda > 0$ が存在し

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u) \xi_\alpha^i \widetilde{\xi}_\beta^j \le \Lambda |\xi||\widetilde{\xi}|,$$

を全ての $\xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}^{mn}$, $x \in \Omega$ と $u \in \mathbb{R}^n$ に対して満たす.

* e-mail: usuba_kunihiro@ma.noda.tus.ac.jp

(H2) ある定数$\lambda > 0$が存在し

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \geq \lambda|\xi|^2,$$

を全ての$\xi \in \mathbb{R}^{mn}$, $x \in \Omega$と$u \in \mathbb{R}^n$に対して満たす.

(H3) ある凹関数$\omega_0 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$が存在し, 以下を満たす.

$$|A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u) - A_{ij}^{\alpha\beta}(y,v)| \leq \omega_0(|x-y|^{\gamma_1} + |u-v|^{\gamma_1}).$$

ここで, 関数ω_0は$\omega_0(0) = 0$と$\omega_0 < 1$を満たす.

注意 1 $A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)$が一様連続ならば条件(H3)は満たされる.

指数$p(x)$については, 以下を仮定する.

(H4) $p(x)$は有界かつ任意の$x \in \Omega$に対して以下を満たす.

$$1 < \gamma_1 := \inf_\Omega p(x) \leq p(x) \leq \sup_\Omega p(x) =: \gamma_2 < 2.$$

(H5) $p(x)$はHölder連続.

次に, 以下で必要となる関数空間の定義を与える.

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \{u \in W^{1,1}(\Omega); |Du|^{p(x)} \in L^1(\Omega)\}.$$
$$W_{\mathrm{loc}}^{1,p(x)}(\Omega) := \{W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(\Omega); |Du|^{p(x)} \in L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)\}.$$

写像$u : \Omega \to \mathbb{R}^n$と有界開集合$\Omega$に対して, Ω上の$p(x)$-エネルギータイプの$\mathcal{E}(u;\Omega)$を次で定義する.

$$\mathcal{E}(u;\Omega) = \int_\Omega (A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u^i D_\beta u^j)^{p(x)/2} dx.$$

定義 2 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,p(x)}(\Omega,\mathbb{R}^n)$が$\mathrm{supp}\varphi \Subset \Omega$となる任意の$\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^n)$に対して,

$$\mathcal{E}(u;\mathrm{supp}\varphi) \leq \mathcal{E}(u+\varphi;\mathrm{supp}\varphi)$$

を満たすとき, uを汎関数$\mathcal{E}$のlocal minimizerという.

$\mathcal{H}^k$をk次元Hausdorff測度とする.

定理 3 ([4]) Ωは$\mathbb{R}^m$の有界開集合とし, $\partial\Omega$を十分滑らかとする. $A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)$は(H1) ∼ (H3)を満たすと仮定する. さらに, $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$を

$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega (A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u^i D_\beta u^j)^{p(x)/2} dx.$$

のlocal minimizerとする. ここで, $p : \Omega \to (1,2)$は(H4), (H5)を満たすとする. このとき, $u \in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$となる. ここで, Ω_0は$\mathcal{H}^{m-\gamma_1}(\Omega - \Omega_0) = 0$を満たすある$\Omega$の開部分集合で, αは$0 < \alpha < 1$を満たす任意の定数である.

定理3の証明の方針を述べる. まず次の記号を導入しておく. 任意に$x_0 \in \Omega$を固定し, R_1を十分小さくとる. $B_r(x_0)$を中心x_0, 半径rの球とする. さらに, 任意に$x_1 \in B_{R_1}(x_0)$をとり, $\rho_2(r) := \sup_{B_r(x_1)} p(x)$と定義する. Rを$B_{2R}(x_1) \subset B_{R_1}(x_0)$となるように十分小さくとる. さらに積分量の評価から連続性を得る際によく用いられる有名なMorreyの定理を述べる.

定理 4 (Morrey's theorem) $u \in W^{1,q}(\Omega)$ が以下を満たすとする.

$$\int_{B_\rho(x)} |Du|^q dy \le C\rho^{m-q+q\alpha} \quad \text{for all } \rho < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega).$$

このとき, $u \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ となる.

証明の方針は "direct approach" と呼ばれる方法を採用する. "Direct approach" とは, 扱っている汎関数 $\mathcal{F}$ を十分に近似し, 正則性についてよく分かっている適当な汎関数 $\mathcal{F}_1$ について考え, その $\mathcal{F}_1$ の minimizer v と $\mathcal{F}$ の minimizer u とを比較して, v の正則性から u の正則性を得る方法を指す. ここで問題となるのが, この $\mathcal{F}_1$ の選び方である. 一般には, $\mathcal{F}$ の被積分関数 $f(x, u, Du)$ の変数のうち x と u を適当に固定したもの $f(x_0, u_0, Du)$ の積分を $\mathcal{F}_1$ として採用することが多い. このような $\mathcal{F}_1$ を, x と u を「凍らせた」と解釈し, "frozen functional" と呼ぶ. Ragusa-Tachikawa-Takabayashi はエネルギー密度 $g^{\alpha\beta}(x)h_{ij}(u)D_\alpha u^i D_\beta u^j$ を扱う際, このような frozen functional のとり方だと, $\mathcal{F}_1$ の minimizer が $\mathcal{E}$ の minimizer を十分に近似してくれず, うまくいかない事を見出し, $x_0 \in \Omega$, 十分小さい $R > 0$ に対して, $\mathcal{F}_1$ を次のように定めることで結果を得た.

$$\mathcal{F}_1(v) := \int_{B_R(x_0)} (g^{\alpha\beta}(x_0)h_{ij}(u_{x_0,R})D_\alpha v^i D_\beta v^j)^{p(x)/2} dx.$$

ここで, $u_{x_0,R}$ は u の $B_R(x_0)$ 上での積分平均を表す. $1 < p(x) < 2$ の場合でもこの手法を用いる. 境界条件 $v|_{\partial B_R(x_1)} = u|_{\partial B_R(x_1)}$ のもとでの $\mathcal{F}_1$ の minimizer を v とすると, Coscia-Mingione[1] の結果から任意の $\beta \in (0,1)$ と $0 < s < R/2$ に対してある定数 $c > 0$ を次を満たすようにとれる.

$$\int_{B_s(x_1)} |Dv|^{\rho_2(2R)} dx \le c\left(\frac{s}{R}\right)^{m-\beta} \left[\int_{B_R(x_1)} |Dv|^{\rho_2(2R)} dx + R^{m-\beta}\right].$$

上記の Morrey's theorem を用いようとするとき, $\mathcal{E}$ の local minimizer u に対して, $\int_{B_s(x_1)} |Du|^{\rho_2(2R)} dx$ を評価する必要がある. $p(x) \ge 2$ の場合では次のように評価をした.

$$\int_{B_s(x_1)} |Du|^{\rho_2(2R)} dx \le c\int_{B_s(x_1)} |Dv|^{\rho_2(2R)} dx + c\int_{B_s(x_1)} |Du - Dv|^{\rho_2(2R)} dx. \qquad (1)$$

(1) 式の右辺第一項については Coscia-Mingione の結果を用いる. よって $p(x) \ge 2$ の場合, 結果を得るために重要な点は, (1) 式の右辺第二項 $\int_{B_s(x_1)} |Du - Dv|^{\rho_2(2R)} dx$ を評価することであった ([3] 参照). しかし, $1 < p(x) < 2$ の場合, この式を評価してしまうと計算過程で負ベキの式が出てきてしまい発散する恐れがあることに問題がある. そこで, $p(x) = p > 1$ (p は定数) のとき, 境界上の正則性の結果を得た Duzzar-Grotowski-Kronz[2] の手法を参考に, 任意の $\mu \ge 0$ に対して, 次のような量を定義する.

$$V_\mu(z) := (\mu^2 + |z|^2)^{(\rho_2(2R)-2)/4} z,$$
$$V(z) := V_0(z) = |z|^{(\rho_2(2R)-2)/2} z.$$

V の定義により, 以下のような $\int_{B_s(x_1)} |Du|^{\rho_2(2R)} dx$ の評価を得る.

$$\int_{B_s(x_1)} |Du|^{\rho_2(2R)} dx = \int_{B_s(x_1)} |V(Du)|^2 dx$$

$$
\begin{aligned}
&\le c\int_{B_s(x_1)}|V(Dv)|^2dx + c\int_{B_s(x_1)}|V(Du)-V(Dv)|^2dx\\
&= c\int_{B_s(x_1)}|Dv|^{\rho_2(2R)}dx + c\int_{B_s(x_1)}|V(Du)-V(Dv)|^2dx.
\end{aligned}
$$

したがって, $1<p(x)<2$ の場合では $\int_{B_s(x_1)}|Du-Dv|^{\rho_2(2R)}dx$ の代わりに $\int_{B_s(x_1)}|V(Du)-V(Dv)|^2dx$ の評価をする必要がある. この評価は一旦, $\int_{B_s(x_1)}|V_\mu(Du)-V_\mu(Dv)|^2dx$ を評価して, $\mu\to 0$ とすることにより得られる. 実際にはかなり複雑な評価を積み重ねて, 十分小さい $\delta>0$ に対して, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R(x_1)}|V(Du)-V(Dv)|^2dx\\
&\quad\le\ c\left[R^{\sigma-m\delta}+\omega_0^{1/q'}(c_1\{R^{\rho_2(2R)-m}\int_{B_{2R}(x_1)}(1+|Du|^2)^{\rho_2(2R)/2}dx\}^{\gamma_1/\rho_2(2R)})\right]\\
&\qquad\cdot\int_{B_{2R}(x_1)}(1+|Du|^2)^{p(x)/2}dx. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

ここで, $q'=\frac{1+\delta}{\delta}$. 次に以下のように記号を定義する.

$$
\begin{aligned}
\Phi(r,p) &:= \left(r^p ⨍_{B_r(x_1)}(1+|Du|^2)^{p/2}dx\right)^{1/p}\\
&= \omega_m^{-1/p}\left(r^p\int_{B_r(x_1)}(1+|Du|^2)^{p/2}dx\right)^{1/p},\\
\Psi(r) &:= \Phi(r,\rho_2(r)).
\end{aligned}
$$

ここで, $\omega_m := |B_1(0)|$. この記号のもとで (1) と (2) を組み合わせることで, 任意の $\tau\in(0,1)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\Psi(\tau r)\le\ & c_3\tau^\gamma\left[1+\tau^{(\beta-m)/\gamma_1}\left\{r^{(\sigma-m\delta)/\gamma_2}+\tilde{\omega_0}(c_5\psi^{\gamma_1}(r))+r^{\sigma_1/(q'\gamma_2)}\right\}\right]\\
&\cdot\Psi(r)+c_4(\tau r)^\alpha
\end{aligned}
$$

を得る. ここで, $r=2R$, $\tilde{\omega_0}:=\omega_0^{1/q'\gamma_2}$, $\gamma:=1-\frac{\beta}{\rho_2(r)}$ とおき, $\alpha\in(0,\gamma)$ ととっている. 次に $\nu\in(\alpha,\gamma)$ ととり, $\tau\in(0,1)$ を $c_3\tau^\gamma<\frac{1}{4}\tau^\nu$ を満たすようにとる. さらに $\varepsilon>0$ を以下を満たすようにとる.

$$
\tilde{\omega_0}(c_5\varepsilon_0^{\gamma_1})<\tau^{(m-\beta)/\gamma_1}. \qquad (3)
$$

最後に $r_0>0$ を

$$
\tau^{(\beta-m)/\gamma_1}r_0^{(\sigma-m\delta)/\gamma_2}\le 1,\qquad\qquad c_4r_0^\alpha\le\frac{1}{4}\varepsilon_0 \qquad (4)
$$

が成り立つように十分小さくとる. ある $r\in(0,r_0)$ に対して, $\Psi(r)<\varepsilon_0$ が成り立つとすると

$$
\begin{aligned}
\Psi(\tau r)&\le\frac{1}{4}\tau^\nu[1+1+1]\Psi(r)+c_4r^\alpha\\
&=\frac{3}{4}\tau^\nu\Psi(r)+c_4r^\alpha
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{3}{4}\tau^{\nu}\Psi(r) + \frac{1}{4}\varepsilon_0 < \varepsilon_0 \tag{5}$$

となり, (5) を繰り返し使うことで, 以下を得る.

$$\begin{aligned} \Psi(\tau^{k+1}r) &\leq (\tau^{k+1})^{\nu}\Psi(r) + c_4\tau^{k\alpha}r^{\alpha}\sum_{j=0}^{k}\tau^{j(\nu-\alpha)} \\ &\leq (\tau^{k+1})^{\nu}\Psi(r) + c_6(\tau^k r)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{6}$$

これより, 定数 $C > 0$ に対して

$$\Psi(s) \leq Cs^{\alpha} \tag{7}$$

が任意の $s \in (0, r)$ に対して成り立つことが分かる. さらに,

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega; \liminf_{\rho \to 0} \Psi(\rho) \leq \varepsilon_0\}$$

とおけば, $u \in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$ であることが得られる. また,

$$\Omega - \Omega_0 \subset \{x \in \Omega; \liminf_{\rho \to 0} \Phi(\rho, \gamma_1) > \varepsilon_0\}$$

が得られることから

$$\mathcal{H}^{m-\gamma_1}(\Omega - \Omega_0) = 0$$

が導かれる.

参考文献

[1] Alessandra Coscia and Giuseppe Mingione. Hölder continuity of the gradient of $p(x)$-harmonic mappings. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 328, No. 4, pp. 363–368, 1999.

[2] Frank Duzaar, Joseph F. Grotowski, and Manfred Kronz. Partial and full boundary regularity for minimizers of functionals with nonquadratic growth. *J. Convex Anal.*, Vol. 11, No. 2, pp. 437–476, 2004.

[3] Maria Alessandra Ragusa, Atsushi Tachikawa, and Hiroshi Takabayashi. Partial regularity of $p(x)$-harmonic maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 365, No. 6, pp. 3329–3353, 2013.

[4] Kunihiro Usuba. Partial regularity of minimizers of $p(x)$-growth functionals with $1 < p(x) < 2$. *Bull. Lond. Math. Soc.*, Vol. 47, No. 3, pp. 455–472, 2015.