

粘性流体の中の剛体の self-propelled motion の境界上での制御

菱田 俊明

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

この研究は, A. Silvestre (リスボン大学), T. Takahashi (ロレーヌ大学) との共同である.

3次元空間において無限遠までひろがる非圧縮粘性流体の運動とその中の剛体の運動の連成系の定常問題を考察する. 流体の中を剛体が自己推進する (self-propelled motion) とは, 剛体に働く external force と external torque がなく, 流体に働く external force もなく, したがって流体と剛体の境界上での相互作用だけによって生じる剛体の運動をいい, それが定常的であるときには, 流体から受ける force と torque がいずれもゼロとなるような運動である. 運動する剛体に固定した座標系における流体の定常運動は,

$$-\Delta u + \nabla p + u \cdot \nabla u - (\eta + \omega \times x) \cdot \nabla u + \omega \times u = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

にしたがう. ここで, Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega \in C^3$ をもつ \mathbb{R}^3 の外部領域で, 剛体の質量中心は原点に固定されている (剛体の質量密度は 1 とする). また, $u(x)$ と $p(x)$ は流体の速度ベクトルと圧力, η と ω は剛体の質量中心の並進速度と質量中心まわりの回転角速度である. 境界 $\partial\Omega$ 上での条件を $u = \eta + \omega \times x$ とすれば, これは通常 no-slip 条件であるが, 本講演では境界上で速度場 u_* を生成する何らかの機構があるものとする (例えば, 潜水艦のプロペラ, 微生物の繊毛など). したがって, 境界条件は

$$u|_{\partial\Omega} = \eta + \omega \times x + u_*, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0 \quad (2)$$

となる. この u_* は本講演で制御 (control) としての役割を担う. 上記のとおり, self-propelled 条件は

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} [T(u, p) - u \otimes u + u \otimes (\eta + \omega \times x) - (\omega \times x) \otimes u] \nu \, d\sigma &= 0, \\ \int_{\partial\Omega} x \times ([T(u, p) - u \otimes u + u \otimes (\eta + \omega \times x) - (\omega \times x) \otimes u] \nu) \, d\sigma &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

と表せる. ただし, $T(u, p) = \nabla u + (\nabla u)^T - p\mathbb{I}$ は応力テンソル (\mathbb{I} は 3×3 単位行列) である. 簡単な計算によって (3) を, (2) も考慮して,

$$\begin{aligned} m\omega \times \eta + \int_{\partial\Omega} [T(u, p)\nu - (\nu \cdot u_*)(u + \omega \times x)] \, d\sigma &= 0, \\ \omega \times (I\omega) + \int_{\partial\Omega} x \times [T(u, p)\nu - (\nu \cdot u_*)(u + \omega \times x)] \, d\sigma &= 0, \end{aligned}$$

と書き直しておいてもよい。ただし,

$$m = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} 1 \, dx, \quad I = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} (|x|^2 \mathbb{I} - x \otimes x) \, dx.$$

目的は, η, ω を与えて, 剛体の self-propelled motion $\eta + \omega \times x$ を達成することである。つまり, (1), (2), (3) をみたす u, p, u_* を求める問題であり, これは制御問題の一種である。解は, 自明解 $u_* = -(\eta + \omega \times x)$, $u = 0$, $p = 0$ も含めて, 無数にあってしかるべきである。われわれの関心は, 物理的に意味のある非自明解を見つけることである。本講演では, $(\eta, \omega) \neq (0, 0)$ を小さく与えるならば, 非自明解が少なくとも1つ存在することを報告する。ここで, 制御 u_* を境界上で指定された部分 (以下の定理の $\Gamma \subset \partial\Omega$) に局在させて構成することが可能である。

Theorem 1. 任意の空でない $\partial\Omega$ の開部分集合 (\mathbb{R}^3 の開集合と $\partial\Omega$ の共通部分) Γ に対して, 以下をみたす定数 $c_0 > 0$ が存在する: $\eta, \omega \in \mathbb{R}^3$ が $|\eta| \leq c_0, |\omega| \leq c_0$ をみたすならば, 次のクラスに属する (1), (2), (3) の解 u, p, u_* が少なくとも一組存在する。

$$\begin{aligned} u_* &\in H^{3/2}(\partial\Omega), & \text{Supp } u_* &\subset \Gamma, \\ (\nabla u, p) &\in H^1(\Omega), & (u, p) &\in C^\infty(\Omega), & (1 + |x|)u &\in L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

さらに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $c_1 = c_1(\varepsilon) \in (0, c_0]$ が存在して ($\omega \neq 0$ かつ $\omega \cdot \eta = 0$ のとき以外は $c_1 = c_0$ と取れる), $|\eta| \leq c_1, |\omega| \leq c_1$ ならば, $u \in L^q(\Omega), \forall q \in [\frac{3}{2} + \varepsilon, \infty]$.

u の無限遠での良い summability (上記の最後の性質) は, self-propelled 条件 (3) の一つめから従う。剛体の回転も伴うとき, このようなことは本質的には [1] ($\omega \cdot \eta = 0$ の場合) と [4] ($\omega \cdot \eta \neq 0$ の場合) により示された ([1], [4] では no-slip 条件のもとでの考察であったので, やり直す必要はあった)。

制御 u_* はある6次元部分空間 $\mathcal{C} \subset H^{3/2}(\partial\Omega)$ の元として見出される。(1), (2), (3) に対する線型化問題の解の一意存在がこの \mathcal{C} を用いて示されると, 小さく与えた η, ω に対して (1), (2), (3) を解くことは難しくないので, 原理としては, 線型化解析を行える \mathcal{C} ならば何であってもよい。線形化問題の解の一意存在を示すときに本質的なことは, (2) の u_* を \mathcal{C} の基底の線型結合で表したときの係数を決定する連立1次方程式を self-propelled 条件 (3) から定め, その 6×6 係数行列の正則性を示す部分である。これを達成するために, (1) の線型化方程式の共役に注目して \mathcal{C} を構成したことは証明の要点の一つと言える。詳しくは, 6通りの境界条件 $v|_{\partial\Omega} = e_i$ または $e_i \times x$ ($i = 1, 2, 3$) それぞれのもとで, 上記の共役方程式の境界値問題を解いて得られる解をそれぞれ $(v_i, q_i), (V_i, Q_i)$ とし, $\mathcal{C} = \text{span} \{ \chi T(v_i, q_i)\nu, \chi T(V_i, Q_i)\nu; i = 1, 2, 3 \}$ と取る。ここで, χ は指定された portion Γ の中に台をもつ適当な cut-off 関数である。

関連する仕事として, Galdi [2], [3] があげられる. [2] では, 剛体が axisymmetric で並進のみする場合にその速度 η を小さく与えて, それを達成する境界上での制御 u_* を構成した. [3] では, 逆に, 適当な条件をみたす u_* を小さく与えて, 上記の連成系をみたす u, p, η, ω の存在を示した.

References

- [1] R. Farwig and T. Hishida, Leading term at infinity of steady Navier-Stokes flow around a rotating obstacle, *Math. Nachr.* 284 (2011), 2065–2077.
- [2] G. P. Galdi, On the steady, translational self-propelled motion of a symmetric body in a Navier-Stokes fluid, *Classical Problems in Mechanics*, Quaderni di Matematica della II Università di Napoli, Vol. 1 (1997), 98–169.
- [3] G. P. Galdi, On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid, *Arch. Rational Mech. Anal.* 148 (1999), 53–88.
- [4] M. Kyed, On the asymptotic structure of a Navier-Stokes flow past a rotating body, *J. Math. Soc. Japan* 66 (2014), 1–16.