非線形 Schrödinger 方程式の時間局所可解性についての注意

和田 健志（島根大学総合理工学研究科）

本講演では，典型的な冪乗型の非線形 Schrödinger 方程式

$$\partial_t u + i\Delta u = f(u) \equiv \lambda |u|^{p-1}u, \quad u(0,\cdot) = u_0 \tag{1}$$

の適切性について考察する．ここで $u : \boldsymbol{R}^{1+n} \to \boldsymbol{C}$ は未知関数，$\lambda \in \boldsymbol{C}$，$p > 1$ である．$0 \le s < n/2$ に対し，$p^*(s) = 1 + 4/(n-2s)$ とおく．よく知られているように，$\max(1,s) < p \le p^*(s)$ のとき，任意の $u_0 \in H^s$ に対して $T > 0$ が存在し，(1) は $C([0,T]; H^s)$（と適当な補助空間の共通部分）において一意可解となる [1–5, 9]．ここで，$p > s$ を仮定したのは，H^s における解を構成するために，(1) の両辺を空間変数で s 回微分するためである．しかし，実際にはこの仮定は不要である場合が多い．実際，$s = 2$ かつ $1 < p < p^*(2) = 1 + 4/(n-4)$ のとき，(1) は $C([0,T]; H^2)$ において一意可解となる [4, 5, 8]．証明の要点は，Schrödinger 方程式が空間変数に関して 2 階，時間変数に関して 1 階であることを利用し，Δu の代わりに $\partial_t u$ を評価することである．$1 < s < 2$ の場合に同様の考察を行うためには，時間変数に関する分数階微分を用いる必要がある．Pecher [7] は時間変数に関する Besov 空間を用いて $1 < s < 2$，$1 < p < p^*(s)$ の場合に (1) が $C([0,T]; H^s)$ において一意可解であることを示しているが，その証明には穴があるように思われる．本講演においては Nakamura-Wada [6] で得られた評価を用いて Pecher の結果をきちんと証明することを目標とする．

Theorem 1. $1 < s < \min(n/2, 2)$ かつ $1 < p < p^*(s)$ とする．$u_0 \in H^s$ ならば，$T = T(\|u_0\|_{H^s})$ が存在し，(1) は $C([0,T]; H^s)$ において一意可解となる．

Remark. $p = p^*(s)$ のとき，$\|u_0\|_{H^s}$ が十分小さいならば (1) は $C(\boldsymbol{R}; H^s)$ において一意可解となる [6].

証明には，Banach 空間に値をとる関数に関する Besov 空間を用いる．$\psi \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ を以下をみたすものとする：

$\hat{\psi}$ は $0 \le \hat{\psi}(\tau) \le 1$ をみたす偶関数で，$|\tau| \le 1$ のとき $\hat{\psi}(\tau) = 1$，$|\tau| \ge 2$ のとき $\hat{\psi}(\tau) = 0$．この ψ を用いて，$\varphi_j \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ $(j = 1, 2, \dots)$ を $\hat{\varphi}_j(\tau) = \hat{\psi}(\tau/2^j) - \hat{\psi}(\tau/2^{j-1})$ により定める．$\tau \ne 0$ のとき $\hat{\psi}(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\varphi}_j(\tau) = 1$ である (Littlewood-Paley 分解).

E を Banach 空間，$\theta \in \boldsymbol{R}$，$1 \le q, \alpha \le \infty$ とする．

$$B^\theta_{q,\alpha}(E) = \{u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}; E); \|u\|_{B^\theta_{q,\alpha}(E)} < \infty\},$$

と定める．ただし，

$$\|u\|_{B^\theta_{q,\alpha}(E)} = \|\psi * u\|_{L^q(E)} + \{\sum_{j=1}^{\infty} (2^{\theta j} \|\varphi_j * u\|_{L^q(E)})^\alpha\}^{1/\alpha}.$$

以下の補題を用いる：

Lemma 1. $n \geq 3$，$0 < \theta < 1$ とする．(q, r) および (γ, ρ) を Schrödinger 方程式に関する admissible paris とする．(すなわち，$\delta(r) \equiv n/2 - n/r$ とおくとき $0 \leq 2/q = \delta(r) \leq 1$, $0 \leq 2/\gamma = \delta(\rho) \leq 1$)．$(\bar{q}, \bar{r})$ を $1 \leq \bar{q} \leq q$, $1 \leq \bar{r} \leq \infty$ かつ $2/\bar{q} - \delta(\bar{r}) = 2(1-\theta)$ をみたす組とする．このとき

$$\partial_t u + i\Delta u = f, \quad u(0, \cdot) = u_0$$

の解に対して，以下の評価式が成り立つ：

$$\|u\|_{B^{\theta}_{q,2}(L^r) \cap L^q(B^{2\theta}_{r,2})} \leq C\|f\|_{B^{\theta}_{\gamma',2}(L^{\rho'})} + C\|f\|_{l^2(L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}}))}.$$

ここで，$\|f\|_{l^2(L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}}))} = \|\psi *_x f\|_{L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}})} + \{\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j *_x u\|^2{}_{L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}})}\}^{1/2}$ であり，ψ，φ_j は空間変数に関する Littlewood-Paley の関数である．

References

[1] T. Cazenave, F. B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal., **14** (1990), 807–836.

[2] J. Ginibre, T. Ozawa, G. Velo, *On the existence of the wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **60** (1994), 211–239.

[3] J. Ginibre, G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case*, J. Funct. Anal., **32** (1979), 1–32.

[4] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **46** (1987), 113–129.

[5] T. Kato, "Nonlinear Schrödinger equations," in: Schrödinger operators, 218–263, Lecture Notes in Phys., **345**, Springer, Berlin, 1989.

[6] M. Nakamura, T. Wada, *Modified Strichartz estimates with an application to the critical nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinear Anal., **130** (2016), 138–156.

[7] H. Pecher, *Solutions of semilinear Schrödinger equations in H^s*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **67** (1997), 259–296.

[8] Y. Tsutsumi, *Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal., **11** (1987), 1143–1154.

[9] Y. Tsutsumi, *L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcial. Ekvac., **30** (1987), 115–125.