凸体の灯心の位置と個数

坂田繁洋 (宮崎大学・教育学部)

2016 年 5 月 7 日

1 序：PISA の街灯問題

2003 年に, PISA(Programme for International Student Assessment, OECD 生徒の学習到達度調査) の「数学リテラシー」で, 以下の問題が出題された：

問題 1.1 (PISA 2003 年)**.** 町議会は小さな三角形の形をした公園に一本の街灯を設置することにしました。その街灯は公園全体を照らすものとします。街灯はどこに設置したらよいでしょうか？

PISA の「街灯問題」に対して, PISA の用意した解答は公園の外心であった。その心は「公園 $\triangle$ に対して, 街灯を点 $x \in \triangle$ に設置したとき, 最も暗くなる点 (三角形の頂点) をできる限り (均等に) 明るくすべきである」というものである (のではないか, とこの問題を聞いた数学者の何人かは言っている)。言い換えれば, 街灯問題は関数

$$\triangle \ni x \mapsto \max_{y \in \triangle} |x - y| \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

を最小にすべきであるというある種の min-max 問題である。

柴田勝征氏 (福岡大学) は, [7] で, PISA の解答に対して, 2 つの視点から異を唱えた。1 つめは, 公園が鈍角三角形である場合に, 外心は公園の外側に出てしまうということである。鈍角三角形の公園に対して, min-max 問題の解は最大辺の中点であるから, 一口に外心と言ってしまうことは誤りである。2 つめは「どうして最も暗い点をできる限り (均等に) 明るくしなければいけないのか？」という点である。すなわち, 問題を数学の言葉に翻訳する際に, その考え方に疑問が残ると指摘した。柴田氏は「街灯は電力の浪費を最低限に抑えるような位置に設置すべきである」として, 三角形の公園に街灯を一本設置したときの「明るさ」を定義し, 1 つの解答を与えた。

柴田氏の街灯問題の定式化を紹介する。$\triangle$ を $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ の三角形とする。高さ $h > 0$ の街灯を点 $x \in \mathbb{R}^2$ に設置する。Kepler の逆 2 乗則 (光源から空間一様に放射される光の流束の密度は光源からの距離の 2 乗に反比例する, 球面の面積は半径の 2 乗に比例する) を仮定して, 1 点 $y \in \triangle$ の「明るさ」を

$$a(x, y, h) = \left(\sqrt{|x-y|^2 + h^2}\right)^{-2} \frac{h}{\sqrt{|x-y|^2 + h^2}} = \frac{h}{\left(|x-y|^2 + h^2\right)^{3/2}} \tag{1.2}$$

と定義する。ここで, 光源と y との距離の逆 2 乗に $h/\sqrt{|x-y|^2 + h^2}$ が乗じられているのは公園の表面が光源から受ける明るさを考えているためである。1 点の明るさを公園全体に渡って積分し, 三角形 $\triangle$ の「明るさ」を

$$A_\triangle(x, h) = \int_\triangle a(x, y, h) dy \tag{1.3}$$

と定義する。柴田氏は「関数 $A_\triangle(\cdot, h) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を最大にする点に街灯を設置すべきである」と考えた。

定義 1.2 ([7])**.** 関数 $A_{\triangle}(\cdot, h)$ の最大点を三角形の公園 $\triangle$ の高さ $h > 0$ の灯心 **(illuminating center)** とよぶ。

2 灯心の研究

柴田氏は, 平面内の三角形に対して, 灯心という新しい中心を定義した。その考察は $\mathbb{R}^m$ の体 (body, 有界な開集合の閉包) の場合へと一般化される。K を $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ の体とする。高さ $h > 0$ の街灯を点 $x \in \mathbb{R}^m$ に設置する。$\mathbb{R}^m$ の m 次元球面 S^m の面積は半径の m 乗に比例するから, 1 点 $y \in K$ の「明るさ」を

$$a(x, y, h) = \left(\sqrt{|x-y|^2 + h^2}\right)^{-m} \frac{h}{\sqrt{|x-y|^2 + h^2}} = \frac{h}{\left(|x-y|^2 + h^2\right)^{(m+1)/2}} \tag{2.1}$$

と定義する。1 点の明るさを K 全体に渡って積分し, K の「明るさ」を

$$A_K(x, h) = \int_K a(x, y, h) dy \tag{2.2}$$

と定義する。関数 $A_K(\cdot, h) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を最大にする点を K の高さ $h > 0$ の灯心とよぶ。

体 K の明るさの関数 A_K についてすぐにわかる事実をいくつか挙げておく。

注意 2.1. $A_K(x, h)$ は K の (x, h) における立体角に等しい。すなわち, K を底面, (x, h) を頂点とする錐体 $(x, h) - K$ と (x, h) を中心とする単位球面 $S^m + (x, h)$ との共通部分の面積は $A_K(x, h)$ に等しい (図)。したがって, 高さ h の灯心は高さ h で K を最もよく見渡せる点と言い換えられる。

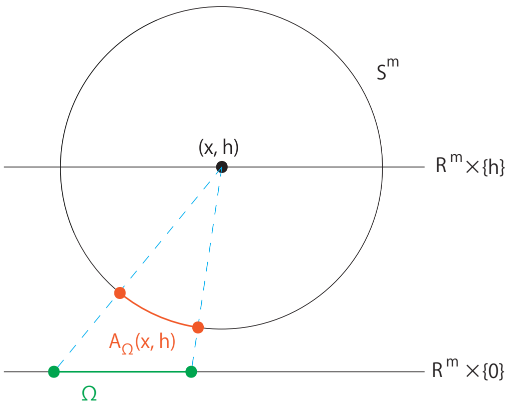

図 1: $A_K(x, h)$ は立体角である。

注意 2.2. 関数 A_K は次の上半空間における Laplace 方程式の境界値問題の解である：

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2}\right) A_K(x, h) = 0, & x \in \mathbb{R}^m,\ h > 0, \\ \displaystyle\lim_{h \to 0^+} A_K(x, h) = \frac{\operatorname{Area}(S^m)}{2} \chi_K(x), & x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial K. \end{cases}$$

ここで, 境界条件は, 直接計算で示すことができるが, 立体角の意味づけから導かれる。

このことから, 灯心は上半空間 $\mathbb{R}^m \times (0, +\infty)$ における Laplace 方程式の解を $\mathbb{R}^m \times \{h\}$ に制限して $\mathbb{R}^m$ 上の関数と思ったときの最大点と言える。したがって, 灯心の研究は上半空間における Laplace 方程式の解の形状に関連する。

灯心の研究を行うにあたって, その存在・位置・個数について考える。以下, 高さ h の灯心の集合を

$$\mathcal{A}_K(h) = \left\{ c \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, A_K(c,h) = \max_{x \in \mathbb{R}^m} A_K(x,h) \right\} \tag{2.3}$$

とおく。

3 灯心の存在と位置

K を $\mathbb{R}^m$ の体とする。K の灯心の存在と位置について考える。

体 K のコンパクト性と関数 $A_K(\cdot, h) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ の連続性から次が示される：

命題 3.1 ([5]). 任意の $h > 0$ に対して, 灯心は存在して, それらのすべては K の凸包 (K を含む最小の凸閉集合) に含まれる。

灯心は体 K の「中心」であるから, その位置は K の凸包よりも K の内側にあることを期待したい。Alexandrov の折り返し原理を用いると, K の凸包の内部に絞り込むことができる。

定義 3.2 ([4]). 方向 $v \in S^{m-1}$ に関して, 高さが $b \in \mathbb{R}$ 以上の K の部分を

$$K_{v,b}^{+} = \{ p \in K \,|\, p \cdot v \geq b \}$$

とおく。超平面 $H_{v,b} := \{ p \in \mathbb{R}^m | p \cdot v = b \}$ に関する折り返しを $\mathrm{Refl}_{v,b}$ とかく。

$$l(v) = \min \left\{ b \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \forall a \geq b,\ \mathrm{Refl}_{v,b}\left(K_{v,b}^{+}\right) \subset K \right\}$$

とおき, 体 K の**心臓**を

$$\heartsuit(K) = \bigcap_{v \in S^{m-1}} \{ p \in \mathbb{R}^m \,|\, p \cdot v \leq l(v) \}$$

で定義する。

注意 3.3. 体 K の心臓は, K が凸の場合に, 熱方程式の解の空間最大点 (ホットスポット) の位置を調べるために, [2] で, 導入され, [3] で, その幾何的性質が考察された。同時期に独立に, [4] で, Riesz ポテンシャルの臨界点の位置を調べるために, **minimal unfolded region** としても導入された。

定理 3.4 ([6]). 任意の $h > 0$ に対して, 関数 $A_K(\cdot, h)$ の臨界点は $\heartsuit(K) \cap (\mathrm{conv}\, K)^{\circ}$ に含まれる。

証明. 点 x を K の心臓の外部から 1 つとる。ある方向 $v \in S^{m-1}$ が存在して, $b := x \cdot v > l(v)$ が成り立つ。したがって, 折り返し $\mathrm{Refl}_{v,b}$ による $K_{v,b}^{+}$ の像は K に含まれる。

$$K_1 := \mathrm{Refl}_{v,b}\left(K_{v,b}^{+}\right) \cup K_{v,b}^{+},\ K_2 := K \setminus K_1$$

とおく。積分核の球対称性より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_K}{\partial v}(x,h) &= -(m+1)h \left(\int_{K_1} + \int_{K_2} \right) \frac{(x-y)\cdot v}{\left(|x-y|^2 + h^2\right)^{(m+3)/2}} dy \\
&= -(m+1)h \int_{K_2} \frac{(x-y)\cdot v}{\left(|x-y|^2 + h^2\right)^{(m+3)/2}} dy \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

を得る。よって, $A_K(\cdot,h)$ の臨界点は K の心臓に含まれる。

K の心臓は K の凸包に含まれることがわかるから, 関数 $A_K(\cdot,h)$ の臨界点が K の凸包の内部に含まれることを示すには, K の凸包の境界点が $A_K(\cdot,h)$ の臨界点ではないことを示せばよい。点 x を K の凸包の境界から 1 つとる。ある方向 $v \in S^{m-1}$ が存在して, K は x を通り v に垂直な超平面 $v^\perp + x$ によって作られる半空間に含まれる。よって, $A_K(\cdot,h)$ の v 方向への微分を x において考えれば, x が $A_K(\cdot,h)$ の臨界点ではないことがわかる。 □

4 灯心の個数

K を $\mathbb{R}^m$ の体とする。K の灯心の個数, 特に一意性, について考える。灯心は, 一般には, 1 点とは限らない。例えば, 熊本市にある公園と宮崎市にある公園の和集合を K として, 高さが 1 メートル (2 つの公園の離れている距離に比べて十分小さい高さ) の街灯を 1 本だけ K に設置することを考える。宮崎県椎葉村 (熊本市と宮崎市の間) に街灯を設置すると, 両方の公園は真っ暗になり, 結果的に明るさの関数 $A_K(\text{椎葉村}, 1)$ は小さくなる。この場合は, どちらか片方を照らすことを諦め, 熊本の公園だけか宮崎の公園だけを明るく照らす方が $A_K(\cdot,h)$ の値は大きくなる。すなわち, 灯心は (少なくとも)2 点存在する。

灯心が一意に定まるためには関数 $A_K(\cdot,h)$ が上に凸であればよい。関数 $A_K(\cdot,h)$ の 2 階微分を直接計算することで, 灯心が一意に定まるための h に関する十分条件として, 次を得る：

命題 4.1 ([5])**.** 体 K に対して,

$$D(K) = \max\{|p-q|\,|p \in K,\ q \in Uf(K)\}$$

とおく。任意の $h \geq \sqrt{m+2}D(K)$ に対して, 関数 $A_K(\cdot,h)$ は $\heartsuit(K)$ で上に狭義凸になる。したがって, 関数 $A_K(\cdot,h)$ の臨界点は一意に定まる。

系 4.2. 写像

$$[D(K), +\infty) \ni h \mapsto \mathcal{A}_K(h) \in \mathbb{R}^m$$

は滑らかである。

関数の冪凸性に関する結果 [1, Corollary 3.5] を $A_K(\cdot,h)$ の場合に改良することで, 灯心が一意に定まるための K に関する十分条件として, 次を得る：

定理 4.3 ([6])**.** 体 K が凸ならば, 任意の $h > 0$ に対して, 関数

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \frac{1}{A_K(x,h)} \in \mathbb{R}$$

は下に狭義凸である。したがって, 関数 $A_K(\cdot,h)$ の臨界点は一意に定まる。

系 4.4. 体 K は凸とする。このとき, 写像

$$(0, +\infty) \ni h \mapsto \mathcal{A}_K(h) \in \mathbb{R}^m$$

は滑らかである。

謝辞

筆者に第 123 回熊本大学応用解析セミナーでの講演と本稿の執筆の機会を与えてくださった北直泰先生 (熊本大学・工学部) に厚く御礼申し上げたい。

参考文献

[1] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler Theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Func. Anal. **22** (1976), 366–389.

[2] L. Brasco, R. Magnanini and P. Salani, *The location of the hot spot in a grounded convex conductor*, Indiana Univ. Math. J. **60** (2011), 633–660.

[3] L. Brasco and R. Magnanini, *The heart of a convex body*, Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's (R. Magnanini, S. Sakaguchi and A. Alvino eds), Springer INdAM Series 2 (2013), 49–66.

[4] J. O'Hara, *Renormalization of potentials and generalized centers*, Adv. in Appl. Math. **48** (2012), 365–392.

[5] S. Sakata, *Movement of centers with respcet to various potentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 8347–8381.

[6] S. Sakata, *Stationary radial centers and characterization of convex polyhedrons*, arXiv: 1603.08324.

[7] Katsuyuki Shibata, *Where should a streetlight be placed in a triangle-shaped park? Elementary integro-differential geometric optics*, http://www1.rsp.fukuoka-u.ac.jp/kototoi/shibataaleph-sjs.pdf

Shigehiro Sakata
Faculty of Education, University of Miyazaki,
1-1 Gakuen Kibanadai West, Miyazaki city, Miyazaki prefecture, 889-2192, Japan
sakata@cc.miyazaki-u.ac.jp
https://sites.google.com/site/shigehirosakata/