LOCAL WELL-POSEDNESS IN LOW REGULARITY OF FIFTH ORDER KDV TYPE EQUATIONS ON THE TORUS

加藤 孝盛

本原稿では, $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上で次の 5 次 mKdV 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^5 u + 6\delta\partial_x(u^5) + \gamma\partial_x(u\partial_x^2(u^2)) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{T}) \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ かつ $u : [-T, T] \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ とする. $\gamma^2 = 25\delta$ のとき, (1) は Lax 方程式から導出される mKdV 階層に属し, 無限個の保存量を持つ可積分系となる. (1) は係数が一般化しているため可積分系ではないが, 次の 2 つ保存量を持つことが知られている.

$$E_1(u(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u^2(t)\,dx$$
$$H(u(t)) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} (\partial_x^2 u(t))^2 + 2\delta u^6(t) - 2\gamma u^2(t)(\partial_x u(t))^2\,dx$$

本原稿では, (1) が持つ代数的な構造を反映する手法を構築することによって, より低い正則性で時間局所的適切性 (LWP) を導くことを目標とする.

本研究において困難な部分は, 「微分の損失」を持つ共鳴部分をどうように相殺するかということと共鳴部分ではない非線形項である非共鳴部分が持つ微分をどのように回復するかということの二つである. ここで共鳴部分とは, 線形部分の周波数と非線形項のそれとがちょうどつり合い振動項が相殺し, 平滑化作用が得られない部分のことを指す. ここで $\mathbb{T}$ では, $\mathbb{R}$ とは異なり線形部分から従う Kato の平滑化効果がなく, 微分の損失を持つ共鳴部分が存在するとき任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して逐次近似法が機能しないことを注意しておく.

まずは, mKdV 方程式 $\partial_t u + \partial_x^3 u = u^2\partial_x u$ の $\mathbb{T}$ 上における既存の結果を述べる. Bourgian [2] は, $s \geq 1/2$ において mKdV 方程式の LWP を導いた. 証明のアイデアは次の通り. mKdV 方程式の微分の損失を持つ共鳴部分が $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} u^2\,dx\,\partial_x u$ となるため, L^2 保存則を用いることによりこの項を線形部分に吸収し, 非共鳴部分に Fourier 制限法を用いることで 1 階の微分を回復し, 逐次近似法により LWP を示した. ここで Fourier 制限法とは次で定義される方程式の線形部分に依存する Fourier 制限ノルムを用いることでより精密な非線形評価を得る手法のことを指す.

$$\|u\|_{X_{b,s}} := \|e^{t\partial_x^3}u(t)\|_{H_t^b H_x^s} = \left\|\langle k\rangle^s \langle \tau - k^3\rangle^b \hat{u}(\tau, k)\right\|_{l_k^2 L_\tau^2}$$

一方で Fourier 制限法を (1) に適用しても, 高々2階の微分しか回復できず機能しない.

また mKdV 方程式において $s<1/2$ では解写像の一様連続性が崩れるため, 逐次近似法が適用できない. これは, 微分の損失のない共鳴部分の中で最も特異性の強い space-time resonance という非線形項に起因する. Takaoka-Tsutsumi [6] 及び Nakanishi-Takaoka-Tsusumi [5] は space-time resonance の持つ強い特異性を和らげるために, 発展作用素 $e^{-t\partial_x^3}$ を初期値に依存するものに修正し, それに対応した Fourier 制限ノルムを構成することで, より精密な非線形項に対するアプリオリ評価を導き, コンパクト性の議論から $s>1/3$ において LWP を示した.

Kwak [4] はエネルギー法を用いることにより, (1) の LWP を $s>2$ で証明した. 通常のエネルギー法では1階の微分しか回復できないが, 彼は特異性の強い非線形項を相殺するために通常のエネルギーに補正項を加え, エネルギーを修正することにより, アプオリ評価を得て LWP を示した.

我々は mKdV 方程式における Bourgain [2] 及び Nakanishi-Takaoka-Tsustumi [5] に対応する結果を5次 mKdV 方程式に対して得ることを考えた. (1) において保存則と gauge 変換を組み合わせることにより, 微分の損失を持つ共鳴部分を相殺し, 非共鳴部分に normal form method (時間に関する部分積分) を複数回適用し微分の損失を回復することで逐次近似法が機能し次の結果が得た.

定理 1. ([3]) $s\geq 3/2$ のとき, 任意の $u_0\in H^s(\mathbb{T})$ に対して $T=T(\|u_0\|_{H^s})>0$ が存在し, $C([-T,T]:H^s(\mathbb{T}))$ において (1) の一意解が存在する. また解写像 $H^s(\mathbb{T})\ni u_0\mapsto u\in C([-T,T]:H^s(\mathbb{T}))$ は連続になる.

注意

(1) 上の定理において一意性が $C([-T,T]:H^s(\mathbb{T}))$ 全体でいえているため, 無条件一意性が成立するを意味している.

(2) ハミルトニアン $H(u)$ が保存することを用いて, $s\geq 2$ において定理1で得た解を時間大域的に延長することができる.

(3) space-time resonance の影響により, $s<3/2$ においては逐次近似法が機能しない. このことから定理1は, mKdV 方程式に対する Bourgain の結果と対応しているといえる.

さらに正則性を下げるために Takaoka-Tsutsumi [6] のアイデアを応用し, 発展作用素 $e^{-t\partial_x^5}$ を次のように修正する.

$$V_{u_0}(t)\varphi := \mathcal{F}_k^{-1}\big[e^{it\phi_{u_0}(k)}\hat{\varphi}(k)\big],\quad \phi(k)=-k^5+2\gamma E_1(u_0)k^3-4\gamma k^3|\hat{u}_0(k)|^2.$$

この発展作用素に対応する Fourier 制限ノルムは次で定義される.

$$\|u\|_{Z_{b,s}} := \|V_{u_0}(-t)u(t)\|_{H_t^bH_x^s} = \big\|\langle k\rangle^s\langle \tau-\phi_{u_0}(k)\rangle^b\hat{u}(\tau,k)\big\|_{l_k^2L_\tau^2}.$$

次に Bejenaru-Tao [1] のアイデアに基づき, 強い非線形効果を制御するために $Z_{b,s}$ 重みを部分的に修正し, 次のノルムで定義される関数空間 Z_w^s を構成する.

$$\|u\|_{Z_w^s} := \left\|w_{s,u_0}(\tau,k)\hat{u}(\tau,k)\right\|_{l_k^2 L_\tau^2},$$

$$w_{s,u_0}(\tau,k) = \begin{cases} \langle k\rangle^s \langle \tau - \phi_{u_0}(k)\rangle^{1/4} \text{ when } \frac{|k|^4}{8} \le |\tau - \phi_{u_0}(k)| \le |k|^5 \\ \langle k\rangle^s \langle \tau - \phi_{u_0}(k)\rangle^{1/2} \text{ otherwise} \end{cases}$$

このノルムを用いることで space-time resonance のアプリオリ評価を改善することができ, コンパクト性の議論から次の結果が得られた.

定理 2. $3/2 > s > 21/16$ のとき, 任意の $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$ に対してある $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ が存在し, (1) の解が $Z_w([-T,T]) \cap C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}))$ で一意に存在する. また解写像も連続である.

ここで $Z_w([-T,T])$ は Z_w を $[-T,T]$ に局所化したものである. $4/3 > 21/16$ であるため, この意味では mKdV 方程式の Nakanishi-Takaoka-Tsutsumi [5] の結果より正則性を下げることができた. ここに 5 次 mKdV 方程式の特有の性質を見出せる.

References

[1] I. Bejenaru and T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 1, 228–259.

[2] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 3, 209–262.

[3] T. K. Kato and K. Tsugawa, *A cancellation property and unconditional well-posedness of fifth order mKdV type equations with periodic boundary condition*, preprint.

[4] C. Kwak, *Low regularity Cauchy problem for the fifth-order modified KdV equations on* $\mathbb{T}$, preprint, arxiv:1510. 000464.

[5] K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, *Local well-posedness in low regularity of the mKdV equation with periodic boundary condition*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **28** (2010), no. 4, 1635–1654.

[6] H. Takaoka and Y. Tsusumi, *Well-posedness of the Cauchy problem for the modified KdV equation with periodic boundary condition*, Int. Math. Res. Not. **2004** no. 56, 3009–3040.

(加藤孝盛) 佐賀大学理工学部数理科学科

E-mail address: tkkato@cc.saga-u.ac.jp