The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data

若杉　勇太（名古屋大学）

1　導入

本講演では次の非線形消散型波動方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = |u|^p, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \varepsilon u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = \varepsilon u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$u = u(t,x)$ は実数値の未知関数，$p > 1$，$\varepsilon > 0$ は小さいパラメータとする．

目標は，一般に $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属するとは限らない，空間遠方での減衰が遅い初期値に対し，時間大域的適切性および，解の長時間挙動を明らかにすることである．

初期値が $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属する場合は多くの結果がある．Todorova-Yordanov [6]，Zhang [7] により，初期値 (u_0,u_1) が $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ に属しかつコンパクトな台をもつときには，$p > 1 + 2/n$ で十分小さい ε に対し時間大域解の存在と，$1 < p \le 1 + 2/n$ で解の爆発が示されている．さらに Hayashi-Kaikina-Naumkin [1] により，重み付き Sobolev 空間 $H^{s,\alpha}(\mathbb{R}^n) \times H^{s-1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ に属する初期値に対して，$\alpha > n/2$（このとき $(u_0,u_1) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ となる），$1 + 2/n < p$ のときに小さい ε に対する時間大域解の存在と，解の熱核への漸近

$$\|u(t) - \theta G(t)\|_{L^m} = o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}) \tag{2}$$

が示されている．ここで $m \in [2, \frac{2n}{n-2s}]$ $(s < n/2), m \in [2,\infty)$ $(s = n/2), m \in [2,\infty]$ $(s > n/2)$ かつ，$G(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$，$\theta$ は適当な定数（後述）である．

初期値の空間遠方での減衰度が弱く，一般に $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属さない場合には，非線形項が $|u|^{p-1}u$ の場合に Nakao-Ono [4] により，$p \ge 1 + 4/n$ かつ，初期値 (u_0,u_1) が $H^1 \times L^2$ に属し，u_0 が $\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 - \|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1} \ge 0$ をみたすとき，十分小さい ε に対し時間大域解が存在することが示されている．さらに，Ikehata-Ohta [3] により，$(u_0,u_1) \in (H^1 \cap L^r) \times (L^2 \cap L^r)$，$p > 1 + 2r/n$ かつ

$$r \in [1,2]\ (n=1,2), \quad r \in \left[\frac{\sqrt{n^2+16n}-n}{4}, \min\left\{2, \frac{n}{n-2}\right\}\right]\ (3 \le n \le 6)$$

の場合に十分小さい ε に対する時間大域解の存在が示されている．また，$1 < p < 1 + 2r/n$ の場合に全ての $n \ge 1$, $r \in [1,2]$ で小さい ε に対する時間大域解の非存在も得られている．解の漸近挙動については，Narazaki-Nishihara [5] により，$n \le 3$ かつ初期値が空間遠方である $k \in (0,1]$ と $c_1 \ne 0$ に対し $\lim_{|x|\to\infty} |x|^{kn}(u_0+u_1)(x) = c_1$ をみたすとき，$p > 1 + 2/(kn)$ での小さい ε に対する時間大域解の存在と，解の漸近形が $G(t) * (c_1(1+|x|^2)^{-kn/2})$ で与えられることが示されている．

本講演では，一般の $n \ge 1$ および $r \in [1,2]$ に対する時間大域解の存在および解の長時間挙動を与える．また，L^1 の初期値に対する熱核への漸近 (2) についても L^m ノルム（$m \in [1,2]$）の意味の漸近を示す．

本講演は池田正弘氏，戍亥隆恭氏（京都大学）との共同研究に基づく．
Email: yuta.wakasugi@math.nagoya-u.ac.jp

2 主結果

以下，簡単のため $n \geq 2$ の場合のみ考える．$n = 1$ の場合も少し仮定を修正すれば同様の定理が成立する．

定理 1 (小さいデータに対する時間大域解の存在 [2])．$n \geq 2$，$s \geq 0$，$0 \leq [s] < p$，$r \in [1, 2]$ とし，p は

$$\begin{aligned} &1 + \frac{2r}{n} < p < \infty && \text{if } \ n \leq 2s, \\ &1 + \frac{2r}{n} < p \leq \min\left\{1 + \frac{2}{n-2s}, \frac{2n}{r(n-2s)}\right\} && \text{if } \ 2s < n \end{aligned}$$

をみたすとする．さらに $\alpha > n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right)$ とし，初期値は

$$u_0 \in H^{s,0}(\mathbb{R}^n) \cap H^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in H^{s-1,0}(\mathbb{R}^n) \cap H^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

をみたすとする．このとき，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対し初期値問題 (1) はただ一つの時間大域解 $u \in C([0, \infty); H^{s,0}(\mathbb{R}^n) \cap H^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n))$ をもつ．

定理 2 (解の漸近挙動 [2])．定理 1 の仮定に加えて，m を

$$r \leq m \leq \frac{2n}{n-2s} \ \left(s < \frac{n}{2}\right), \quad r \leq m < \infty \ \left(s = \frac{n}{2}\right), \quad r \leq m \leq \infty \ \left(s > \frac{n}{2}\right)$$

をみたすようにとる．また δ を任意の正数とする．このとき次が成立する．
(i) $r = 1$ のとき，

$$\|u(t) - \theta G(t)\|_{L^m} \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \min\{\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{4}, \frac{n}{2}(p-1) - 1\} + \delta} \tag{3}$$

が成立する．ここで，$G(t, x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ かつ

$$\theta = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (u_0 + u_1)(x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx dt.$$

(ii) $r > 1$ のとき，

$$\|u(t) - \varepsilon \mathcal{G}(t)(u_0 + u_1)\|_{L^m} \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{m}\right) - \min\{\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right), \frac{n}{2r}(p-1) - 1\} + \delta} \tag{4}$$

が成立する．ここで，$\mathcal{G}(t)\phi = G(t) * \phi$ である．

注意 3． (i) $r > 1$ かつ $p < 1 + 2r/n$ の場合には，適当な $u_0, u_1 \in L^r$ に対して時間大域解の非存在を示すことができる．

(ii) 定理 2 について，(3) は $r = 1$ のとき (1) の解の漸近形が熱核の定数倍で与えられることを意味している．それに対し，(4) は $r > 1$ のとき (1) の解の漸近形が $\varepsilon(u_0 + u_1)$ を初期値とする線形熱方程式の解で与えられることを意味している．特にこの場合は漸近形に非線形項の影響が現れない．これは非線形項 $|u|^p$ の空間遠方での減衰が線形部分よりも速くなることに起因する．

3 証明の概略

3.1 記号

関数 $f = f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\phi = \phi(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，f の Fourier 変換，ϕ の逆 Fourier 変換をそれぞれ次で定義する.

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx,\ \mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \phi(\xi)\, d\xi.$$

また，$s \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ に対し，重み付き Sobolev 空間 $H^{s,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ を

$$H^{s,\alpha}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|f\|_{H^{s,\alpha}} < \infty\}, \quad \|f\|_{H^{s,\alpha}} = \|\langle x\rangle^{\alpha} \langle\nabla\rangle^{s} f\|_{L^2}$$

で定義する．ただし $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$，$\langle\nabla\rangle^s f = \mathcal{F}^{-1}[\langle\xi\rangle^s \hat{f}]$ である．

$G(t,x)$ を熱核，すなわち $G(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ とし，$\mathcal{G}(t)\phi(x) = G(t) * \phi(x)$ とする．消散型波動方程式 (1) の線形部分の解作用素を $\mathcal{D}(t)$ とおく．すなわち，

$$\mathcal{D}(t) := e^{-\frac{t}{2}} \mathcal{F}^{-1} L(t,\xi) \mathcal{F}.$$

ここで，$L(t,\xi)$ は次で与えられる．

$$L(t,\xi) := \begin{cases} \dfrac{\sinh(t\sqrt{1/4-|\xi|^2})}{\sqrt{1/4-|\xi|^2}} & \text{if } |\xi| < 1/2, \\ \dfrac{\sin(t\sqrt{|\xi|^2-1/4})}{\sqrt{|\xi|^2-1/4}} & \text{if } |\xi| > 1/2. \end{cases}$$

本講演を通して，s, r, α は $s \geq 0$, $r \in [1,2]$, $\alpha > n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right)$ をみたす実数とし，これらを用いて以下のノルムを定義する．

$$\begin{aligned} \|\phi\|_X &:= \sup_{t>0} \left[\langle t\rangle^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)} \|\phi(t)\|_{L^2} + \langle t\rangle^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)+\frac{s}{2}} \||\nabla|^s \phi(t)\|_{L^2} + \langle t\rangle^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\alpha}{2}} \||\cdot|^{\alpha} \phi(t)\|_{L^2} \right], \\ \|\psi\|_Y &:= \sup_{t>0} \left[\langle t\rangle^{\eta} \||\nabla|^{[s]} \psi(t)\|_{L^\rho} + \sup_{\gamma \in [\sigma_1,\sigma_2]} \langle t\rangle^{\frac{n}{2}\left(\frac{p}{r}-\frac{1}{\gamma}\right)} \|\psi(t)\|_{L^\gamma} + \langle t\rangle^{\zeta} \|\langle\cdot\rangle^{\alpha} \psi(t)\|_{L^q} \right]. \end{aligned}$$

ここで，$\eta = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right) + \frac{s}{2} + \frac{n}{2r}(p-1) - \frac{1}{2}$, $\zeta = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{n}{2r}(p-1) - \frac{1}{2}$, $q = \frac{2n}{n+2}$, $\rho = \frac{2n}{n+2-2(s-[s])}$, $\sigma_1 = \max\left\{1, \frac{nr}{n+r}\right\}$, $\sigma_2 = \min\left\{2, \frac{2n}{p(n-2s)_+}\right\}$ とする．

3.2 証明の概略

定理 1, 2 の証明には，次の線形評価が重要な役割を果たす．

補題 4. $\gamma, \nu \in [1,2]$, $\beta \geq 0$, $s_1 \geq s_2 \geq 0$ とする．このとき，$t \geq 1$ に対し次が成立する．

$$\begin{aligned} \||\nabla|^{s_1}(\mathcal{D}(t)\psi - \mathcal{G}(t)\psi)\|_{L^2} &\lesssim \langle t\rangle^{-\frac{s_1-s_2}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\right)-1} \||\nabla|^{s_2}\psi\|_{L^\gamma} + e^{-\frac{t}{4}} \||\nabla|^{s_1}\langle\nabla\rangle^{-1}\psi\|_{L^2}, \\ \||\cdot|^{\beta}(\mathcal{D}(t)\psi - \mathcal{G}(t)\psi)\|_{L^2} &\lesssim \langle t\rangle^{\frac{\beta}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\right)-1} \|\psi\|_{L^\gamma} + \langle t\rangle^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}\right)-1} \||\cdot|^{\beta}\psi\|_{L^\nu} + e^{-\frac{t}{4}} \|\langle\cdot\rangle^{\beta}\langle\nabla\rangle^{-1}\psi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

この線形評価を用いて，次を示す．

補題 5. 定理 1 の仮定のもと次が成立する．

$$\left\| \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau)\psi(\tau)d\tau \right\|_X \lesssim \|\psi\|_Y.$$

さらに Sobolev の埋め込みを用いて，以下の非線形評価を得る．

補題 6. 定理 1 の仮定のもと次が成立する．

$$\||u|^p\|_Y \lesssim \|u\|_X^p,$$
$$\||u|^p - |v|^p\|_Y \lesssim \|u-v\|_X \left(\|u\|_X + \|v\|_X\right)^{p-1}.$$

補題 5, 6 と縮小写像の原理から，積分方程式

$$u(t) = (\partial_t + 1)\,\mathcal{D}(t)\varepsilon u_0 + \mathcal{D}(t)\varepsilon u_1 + \int_0^t \mathcal{D}(t-\tau)|u(\tau)|^p\, d\tau$$

の解を構成することで定理 1 が示される．定理 2 を示すには，補題 4 を用いて時間大域解 u が非斉次線形熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = |u|^p, \\ v(0,x) = \varepsilon(u_0+u_1)(x) \end{cases}$$

の解 v で近似できることを示し，その後 v の漸近形が $\theta G(t)$ $(r=1)$，$\varepsilon\mathcal{G}(t)(u_0+u_1)$ $(r>1)$ で与えられることを示す．

参考文献

[1] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, *Damped wave equation with super critical nonlinearities*, Differential Integral Equations **17** (2004), 637–652.

[2] M. Ikeda, T. Inui, Y. Wakasugi, *The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data*, arXiv:1605.04616v1.

[3] R. Ikehata, M. Ohta, *Critical exponents for semilinear dissipative wave equations in* $\mathbf{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 87–97.

[4] M. Nakao, K. Ono, *Existence of global solutions to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations*, Math. Z. **214** (1993), 325–342.

[5] T. Narazaki, K. Nishihara, *Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with slowly decaying data*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 803–819.

[6] G. Todorova, B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations **174** (2001), 464–489.

[7] Qi S. Zhang, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), 109–114.