Random data Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation with derivative nonlinearity

平山 浩之 (宮崎大学 テニュアトラック推進機構)

1　イントロダクション

本講演では, 非線形項に 1 階の微分を含む非線形シュレディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \partial_j(\overline{u}^m),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x\in\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1}$$

について考える. ここで $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,\cdots,d$, Δ はラプラシアンであり, 未知関数 $u=u(t,x)$ は複素数値である. また, 初期値はソボレフ空間 $H^s = H^s(\mathbb{R}^d)$ に与える. 方程式 (1) はスケール変換

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{-\frac{1}{m-1}} u(\lambda^{-2}t, \lambda^{-1}x)$$

により不変であり, スケール臨界指数は $s_c = \frac{d}{2} - \frac{1}{m-1}$ である. 方程式 (1) は非線形項に 1 階の微分が含まれているため, H^s において 1 階の可微分性の損失が生じる. すなわち, 任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して $\|\partial_j(\overline{u}^m)\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s}^m$ のような評価は一般には成立しない. したがって解の一意存在について考える際には, いかにしてその損失を解消するかという点が重要となる. 分散型方程式には分散性による平滑化効果があるが, シュレディンガー方程式の分散性は弱いため, 平滑化効果から 1 階の可微分性の損失を解消することは出来ない. しかし, 方程式 (1) の非線形項に現れている $\overline{u}^m$ は共鳴現象の観点から非常に良い構造を持っている. そのことを見るために $v = e^{-it\Delta}u$ と置くと方程式 (1) は

$$\partial_t v = -ie^{-it\Delta}\partial_j\left(\left(\overline{e^{it\Delta}v}\right)^m\right)$$

と書き換えられる. この両辺を x についてフーリエ変換すると

$$\partial_t\widehat{v}(\xi) = \xi^{(j)}\int_{\xi_1+\cdots+\xi_m=\xi} e^{it(|\xi|^2+|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_m|^2)}\widehat{v}(-\xi_1)\cdots\widehat{v}(-\xi_m)$$

となる. ここで $\xi^{(j)}$ は $\xi\in\mathbb{R}^d$ の第 j 成分である. この右辺の振動数 $\Phi = |\xi|^2+|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_m|^2$ が 0 となるとき「共鳴が生じる」と言うが, $\xi=\xi_1=\cdots=\xi_m=0$ (この場合右辺 $=0$ となる) でなければ共鳴が生じないことがわかる. したがって右辺の振動が残るため, これを利用して可微分性の損失を解消することが出来る. (積分方程式における時間 t についての積分により Φ の負ベキが得られる.) Grünrock ([6]) は, このような非共鳴構造とフーリエ制限ノルム法を用いることにより, $m+d\geq 4$ の場合に $s>s_c$ に対して H^s における (1) の時間局所適切性を得た. ここで条件 $m+d\geq 4$ は $s_c\geq 0$ と同値であり, $m=2$, $d=1$ の場合 (このとき $s_c=-\frac{1}{2}$) には L^2 における時間大域的適切性を得ている. さらに講演者は [8] において, Hadac-Herr-Koch ([7]) によって応用

された 2 乗有界変動関数の空間 V^2 およびその (ある意味での) 共役空間 U^2 を用いることにより, $m+d\geq 4$ の場合に H^{s_c} における (1) の小さな初期値に対する時間大域適切性および解の散乱を得た. 一方, $s<s_c$ の場合には初期値に対して (1) の解を与える写像が C^m 級にならないため, 逐次近似によって (1) の解を構成することは出来ない. そこで本講演では初期値を確率化し, $s<s_c$ の場合 (スケール超臨界) に (1) の解の一意存在を「ほとんど確実に (almost surely)」の意味で得ることを目的とする.

2 初期値の確率化

初期値の確率化については Bourgain ([3]) や Burq-Tzvetkov ([4], [5]) によるフーリエ級数展開や固有関数展開を用いた確率化が挙げられる. しかし, 本講演で考える (1) は全空間上の問題であるため, これらの確率化を用いることは出来ない. そこで, Lührmann-Mendelson ([10]) や Bényi-Oh-Pocovnicu ([1]) によって導入された次の確率化を行う.

定義 1. Ω を確率空間とし, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ を平均 0 のガウス分布に従う互いに独立な Ω 上の複素数値確率変数の列とする. このとき $\phi\in H^s$ に対し, その確率化を

$$\phi^\omega := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} g_n(\omega)\psi(D-n)\phi, \quad \omega\in\Omega$$

により定める. ここで $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は $\operatorname{supp}\psi\subset[-1,1]^d$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\psi(\xi-n)=1$ を満たすものであり, $\psi(D-n)\phi=\mathcal{F}_\xi^{-1}[\psi(\xi-n)\widehat{\phi}(\xi)]$ である.

この確率化は, ウィーナー分解 $\phi=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\psi(D-n)\phi$ を基にしたものであり, 次の性質を持つ.

$$\begin{aligned}\phi\in H^s \ &\Rightarrow \phi^\omega\in H^s \ a.s.\ \omega\in\Omega,\\ \phi\notin H^s \ &\Rightarrow \phi^\omega\notin H^s \ a.s.\ \omega\in\Omega\end{aligned}$$

したがって, 確率化によって関数の可微分性は上がらない. 一方, 作用素 $\psi(D-n)$ の持つ性質

$$\|\psi(D-n)\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim\|\psi(D-n)\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad 1\leq\forall p\leq\forall q\leq\infty$$

により, 次のことが成立する.

$$\phi\in L^2(\mathbb{R}^d) \ \Rightarrow \phi^\omega\in L^p(\mathbb{R}^d) \ a.s.\ \omega\in\Omega,\ \forall p\geq 2.$$

すなわち, 確率化によって関数の可積分性が上がる. これがウィーナー分解による確率化を用いる利点である.

3 主結果

非線形分散型方程式の解の一意存在を考える際に鍵となるのはストリッカーツ評価である. ストリッカーツ評価とは, 許容指数対 (q,r) に対して成立する次の不等式である.

$$\|e^{it\Delta}\phi\|_{L_t^qL_x^r(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}\lesssim\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

ここで (q,r) が許容指数対であるとは, $2\leq q,r\leq\infty$, $(q,r)\neq(2,\infty)$, $\frac{2}{q}=d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)$ を満たすことである. Bényi-Oh-Pocovnicu は, 次のような確率論的ストリッカーツ評価を導いた.

命題 2. (1) $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $2 \le q, r < \infty$, $0 < T < \infty$ とする．このとき, ほとんどいたるところの $\omega \in \Omega$ に対して $C_\omega > 0$ が存在して次の評価が成立する．

$$\|e^{it\Delta}\phi^\omega\|_{L_t^q L_x^r([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \le C_\omega T^{\frac{1}{q}} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(2) $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．また, (q, r) を許容指数対で $q, r < \infty$ であるものとし, $r \le \widetilde{r} < \infty$ とする．このとき, ほとんどいたるところの $\omega \in \Omega$ に対して $C_\omega > 0$ が存在して次の評価が成立する．

$$\|e^{it\Delta}\phi^\omega\|_{L_t^q L_x^{\widetilde{r}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \le C_\omega \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

確率論的ストリッカーツ評価の特徴は, 許容指数対でなくても成立するという点である．これは確率化によって関数の可積分性が上がったことによるものである．通常のストリッカーツ評価の代わりに確率論的ストリッカーツ評価を用いることで, ソボレフの埋め込みを用いずに線形解を評価することが出来る．(例えば通常のストリッカーツ評価で $\|e^{it\Delta}\phi\|_{L_{tx}^4}$ を評価しようとすると, まずは許容指数対になるように埋め込み $W_x^{\frac{d-2}{4}, \frac{2d}{d-1}} \hookrightarrow L_x^4$ を用いる必要がある．) そのため確率化された初期値に対しては, 解の一意存在が得られるためのソボレフ指数を下げることが可能となる．実際 Bényi-Oh-Pocovnicu ([1], [2]) は確率論的ストリッカーツ評価を用いることで, 3 次の非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d$$

の解の一意存在性をスケール超臨界のソボレフ空間において almost surely の意味で得た．一方, 本講演で考える方程式 (1) では非線形項から生じる可微分性の損失も解消しなければならない．そこで, 確率論的ストリッカーツ評価と前述の非線形項の非共鳴構造を組み合わせて用いることで次の結果を得ることが出来た．

定理 3 (主結果 [9])**.** $s_* := \max\left\{\frac{s_c}{2}, \frac{d-1}{d}s_c, s_c - \frac{d}{2(d+1)}\right\}$ と置く．$m + d \ge 5$, $s_* < s < s_c$ とし, $u_0 \in H^s$ とする．このとき, ほとんどいたるところの $\omega \in \Omega$ に対して $T_\omega > 0$ および $u|_{t=0} = u_0^\omega$ を満たす (1) の $[0, T_\omega]$ 上の解 $u \in C([0, T_\omega]; H^s)$ が存在し, u は関数空間 $e^{it\Delta}u_0^\omega + X^{s_c+\delta, \frac{1}{2}+\epsilon}([0, T_\omega])$, $(0 < \delta, \epsilon \ll 1)$ において一意である．

注意 4. (1) 条件 $m + d \ge 5$ は $m \ge 2$, $d \ge 1$, $(m, d \in \mathbb{N})$ に対して $s_c > 0$ と同値である．

(2) $s, b \in \mathbb{R}$ に対して $X^{s,b}$ は, フーリエ制限ノルム $\|u\|_{X^{s,b}} = \|\langle\xi\rangle^s \langle\tau + |\xi|^2\rangle^b \mathcal{F}_{x,t}[u]\|_{L_{\tau\xi}^2}$ により定義されるブルガン空間である．

(3) $X^{s_c+\delta, \frac{1}{2}+\epsilon}$ の代わりに前述の U^2 空間型のブルガン空間を解の空間として用いることで, 小さな初期値に対する時間大域解および解の散乱も得ることが出来る．

ここで, s_c と s_* の差 $s_c - s_*$ は $d \to \infty$ のとき $\frac{1}{2}$ に収束する．すなわち, 次元が高くなるにつれて解の一意存在が得られるソボレフ指数の下限は $s_c - \frac{1}{2}$ に近づいていく．前述の通り確率化によって初期値の可微分性は上がらないため, almost surely の意味でも $s < 0$ における解の一意存在を得ることは難しい．主結果の条件 $m + d \ge 5$ は, $m \ge 2$, $d \ge 2$ の場合 $s_c - \frac{1}{2} \ge 0$ と同値なので, s_* が $s_c - \frac{1}{2}$ に近づくのは妥当であると考えられる．一方, Bényi-Oh-Pocovnicu による 3 次の非線形シュレディンガー方程式に対する結果では, 次元が高くなるにつれて解の一意存在が得られるソボレフ指数の下限は $s_c - 1$ に近づく．この違いは非線形項の非共鳴構造を用いたことによって現れる．

なお, 本講演は信州大学の岡本葵氏との共同研究に基づく．

参考文献

[1] Á. Bényi, T. Oh, and O. Pocovnicu, Wiener randomization on unbounded domains and an application to almost sure well-posedness of NLS, Excursion in Harmonic Analysis, Volume 4, Applied and Numerical Harmonic Analysis (2015), 3–25.

[2] Á. Bényi, T. Oh, and O. Pocovnicu, On the probabilistic Cauchy theory of the cubic nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 2 (2015), 1-50.

[3] J. Bourgain, Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation, Comm. Math. Phys. **176** (1996), no. 2, 421-445.

[4] N. Burq and N. Tzvetkov, Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I: local theory, Invent. Math. 173 (2008), no. 3, 449-475 (2008).

[5] N. Burq and N. Tzvetkov, Random data Cauchy theory for supercritical wave equations II: a global existence result, Invent. Math. 173 (2008), no. 3, 477-496 (2008).

[6] A. Grünrock, On the Cauchy - and periodic boundary value problem for a certain class of derivative nonlinear Schrödinger equations, arXiv:0006195v1.

[7] M. Hadac, S. Herr, and H. Koch, Well-posedness and scattering for the KP-II equation in a critical space, Ann. Inst. H. Poincaré. 26 (2009), 917–941.

[8] H. Hirayama, Well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations with a derivative nonlinearity at the scaling critical regularity, Funkcialaj Ekvacioj, **58** (2015), 431–450.

[9] H. Hirayama, and M. Okamoto, Random data Cauchy problem for the nonlinear Schrodinger equation with derivative nonlinearity, to appear in Discrete and Continuous Dynamical System -A.

[10] J. Lührmann and D. Mendelson, Random data Cauchy theory for nonlinear wave equations of power-type on $\mathbb{R}^3$, Comm. Partial Differential Equations 39 (2014), no. 12, 2262-2283.