Global behavior of solutions to Generalized Gross-Pitaevskii equation

宮崎 隼人 (津山工業高等専門学校 総合理工学科)*

1 導入

本講演では, 空間 1, 2 次元において, 次の一般化 Gross-Pitaevskii 方程式を考察する:

$$\text{(GGP)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = ||u|^2 - 1|^{p-2}(|u|^2 - 1)u, & (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで, $u(t, x) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{C}$, $p \geqslant 2$ とする. また, 未知関数 u に次の空間遠方での非減衰条件

$$|u(x)|^2 \to 1 \quad (|x| \to \infty) \tag{1.1}$$

を仮定する. 方程式 (GGP) はエネルギー

$$\mathcal{E}_p(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{p}\||u|^2 - 1\|_{L^p}^p$$

を保存する方程式として得られるものであり, Gross-Pitaevskii 方程式

$$\text{(GP)} \qquad i\partial_t u + \Delta u = (|u|^2 - 1)u, \quad |u(x)|^2 \to 1 \quad (|x| \to \infty)$$

の一般化になっている.

方程式 (GP) の一般化は Gallo (2008) や Miyazaki (2014) で考察されているが, それらにおける一般化は, 主に非線形項の $|u| \to 0$ や $|u| \to \infty$ のときの形状についての一般化であった. (GP) の非線形項は, 条件 (1.1) の下では, $|x| \to \infty$ において $|u|^2 - 1$ の "1 次オーダー" で減衰している. 解の挙動, とくに長時間挙動は, この減衰オーダーに支配されていると考えられるので, この減衰オーダーを一般化したモデルを考えることにする. このとき, 保存則の構造を念頭に置きながらこのような一般化をしたものが方程式 (GGP) である. 実際に, 方程式 (GGP) の非線形項は, $|x| \to \infty$ において $|u|^2 - 1$ の "$p - 1$ 次オーダー" で減衰している. ここで, (GP) の解の長時間挙動に関連する先行結果として, Gustafson-Nakanishi-Tsai [1] などがあることに注意する.

このような研究の第一歩として, 本研究では次を考察する.

本研究の目的

オーダーの指数 p が大きいとき "性質の良い" 振る舞いをする解があるか.

ここでは, 方程式 (GGP) の解 u として, 遠方で一様な値 $e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ に近づくものを考える. 特に $\theta = 0$ とし, 時刻無限大付近で "$1 +$ (線形解)" という漸近挙動をもつ解の存在について考える. このため, 未知関数 u を $u = 1 + v$ と分解し, 次の方程式に書き直す:

$$\text{(DGP)} \qquad \begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = \underbrace{||v|^2 + 2\,\mathrm{Re}(v)|^{p-2}(|v|^2 + 2\,\mathrm{Re}(v))(1 + v)}_{=:F(v)}, \\ v(0, x) = v_0(x) := u_0(x) - 1. \end{cases}$$

そして, この方程式が散乱解を持つかどうかを考察する.

* 〒 708-8509 岡山県津山市沼 624-1
Email: miyazaki@tsuyama.kosen-ac.jp
Web page: http://www.tsuyama-ct.ac.jp/miyazaki/
本講演は大阪大学の眞崎聡氏との共同研究に基づく.

2 主結果

区間 $I \subset \mathbb{R}$ と指数組

$$P_1 = \left(\frac{1}{p}, \frac{(2-n)p+2n}{2p(p-2)}\right) = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{q_1}\right),\ P_2 = \left(\frac{np^2-2p-2n}{2np(p-1)}, \frac{(2-n)p+2n}{4p(p-1)}\right) = \left(\frac{1}{r_2}, \frac{1}{q_2}\right)$$

と $s_c = \frac{n}{2} - \frac{1}{p-1}$ に対し, 次の関数空間を定義する:

$$X(I) = L(P_1; I) \cap \dot{W}^{s_c}(P_2; I), \quad L(P_1; I) = L^{q_1}(I, L^{r_1}(\mathbb{R}^n)), \quad \dot{W}^{s_c}(P_2; I) = L^{q_2}(I, \dot{W}^{s,r_2}(\mathbb{R}^n)).$$

さらに, Strauss 冪を $k_{st} = \frac{n+2+\sqrt{n^2+12n+4}}{2n}$, 質量臨界冪を $k_m = 1 + \frac{4}{n}$ とする.

定理 1 (時間局所適切性)**.** $1 + k_{st} < p < 1 + k_m$ とする. このとき, 初期値問題 (DGP) は $\dot{H}^{\frac{n(p-2)}{2p}} \cap \dot{H}^{s_c}$ において時間局所適切である. すなわち, 任意の $v_0 \in \dot{H}^{\frac{n(p-2)}{2p}} \cap \dot{H}^{s_c}$ に対して, 時間区間 $I = I(v_0)$ が存在し, (DGP) の解 $v \in X(I) \cap C(I, \dot{H}^{\frac{n(p-2)}{2p}} \cap \dot{H}^{s_c})$ が一意に存在する. さらに, $v_0 \in \dot{H}^{\sigma}$ $(0 \leqslant \sigma < p-1)$ であれば $v \in C(I, \dot{H}^{\sigma})$ である. つまり $v_0 \in H^1$ のとき, エネルギー $\mathcal{E}_p(1 + v(t))$ は $t \in I$ において保存する.

定理 2 (解が散乱するための条件)**.** $1 + k_{st} < p < 1 + k_m$ とする. また $v_0 \in H^{s_c}$ とし, $v \in C(I_{\max}, H^{s_c})$ を定理 1 で得られる最大延長解とする. このとき $\|v\|_{X(I_{\max})} < \infty$ であるならば, $I_{\max} = \mathbb{R}$ であり解 v は $t \to \pm\infty$ のとき H^{s_c} の意味で散乱する.

定理 3 (小さな初期値に対する散乱解の存在)**.** $1+k_{st} < p < 1+k_m$ とする. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|v_0\|_{\dot{H}^{s_c}} + \|v_0\|_{L^{\frac{n(p-2)}{2}}} \leqslant \delta$ を満たす任意の $v_0 \in L^{\frac{n(p-2)}{2}} \cap \dot{H}^{s_c}$ に対し, (DGP) の大域解 $v \in X(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, H^{s_c})$ が一意に存在する. さらに解 v は

$$\|v\|_{X(\mathbb{R})} \leqslant C(\|v_0\|_{L^{\frac{n(p-2)}{2}}} + \|v_0\|_{\dot{H}^{s_c}})$$

を満たし, $t \to \pm\infty$ において H^{s_c} の意味で散乱する.

注意 1.
- $k_{st} < p - 1$ とエネルギー臨界冪の関係から次元は $n = 1, 2$ に制限される.
- 解が $X(I)$ に属すことを要請しなければ, $p \geqslant 2$ で時間局所適切性を証明できる.
- 定理 3 において, $v_0 \in L^2$ は $L^{\frac{n(p-2)}{2}} \cap \dot{H}^{s_c} \subset L^2$ から自動的に得られる.

証明は縮小写像の原理による. (DGP) の非線形項 $F(v)$ は

$$|F(v)| \leqslant C(|v|^{p-1} + |v|^{2p-1}).$$

を満たしていて, 本質的には右辺の非線形項のようにみなしてよい. 主結果の指数 p の範囲において, $|v|^{p-1}$ は質量劣臨界, $|v|^{2p-1}$ は質量優臨界となることに注意する. このように質量劣臨界部分が含まれているので, 散乱を考えることが難しくなる ($1 + k_m \leqslant p$ の場合は, 劣臨界部分がなくなるため先行結果 [2] に含まれる). さらに, 非線形項はゲージ不変ではないため重み付き空間を用いた解析も適さない. そこで, 質量劣臨界部分には Kato [3] による Non-admissible Strichartz 評価を適用し, 一方の質量優臨界部分には Sobolev の埋蔵定理と Non-admissible Strichartz 評価を組み合わせることで, $X(I)$ において閉じた評価が得られた. ここがポイントである.

参考文献

[1] S. Gustafson, K. Nakanishi, and T.-P. Tsai, Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions. Ann. Henri Poincaré **8** (2007), no. 7, 1303–1331.

[2] M. Nakamura, T. Ozawa, Small data scattering for nonlinear Schrödinger wave and Klein-Gordon equations. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **1** (2002), no. 2, 435–460.

[3] T. Kato, An $L^{q,r}$-theory for nonlinear Schrödinger equations. Spectral and scattering theory and applications, 223–238, Adv. Stud. Pure Math., **23**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1994.