変動指数 Lebesgue 空間に対する Sobolev の埋め込みについて

石渡 通徳 (大阪大学大学院基礎工学研究科)

目 次

1 問題と主結果

本稿を通じ空間次元 N は $N \geq 3$ を満たし, 断りのない限り空間領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は原点を含む有界領域であるとする. $q \in C(\Omega)$ を

$$\text{(Q)} \qquad q(0) = 2^*, \quad q(x) < 2^* \text{ for } x \neq 0, \quad 1 < q(x) \text{ for all } x \in \Omega \tag{1.1}$$

を満たす関数とする. ただし $2^* = \frac{2N}{N-2}$ は Sobolev の臨界指数を表す.

$L^{q(\cdot)}$ により, 可測関数 f に対する Luxenburg norm

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} := \inf \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{q(x)} dx \leq 1 \right\}$$

に対して

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) = \{ f; f \text{ は } \Omega \text{ 上可測}, \|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} < \infty \}$$

で定まる Orliz 空間 (変動指数 Lebesgue 空間) を表す. 本稿では変動指数 Lebesgue 空間に対する Sobolev の埋め込み

$$\text{(E)} \qquad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

を考える. (Q) より, これは「指数が原点でのみ臨界指数 2^* に一致する空間への Sobolev の埋め込み」であることに注意する.

定数指数 $q(\cdot) \equiv 2^*$ の場合の Sobolev の埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ の有界性 (命題 2.1 を見よ) と (Q) より, (E) の有界性 (よって連続性) は直ちに従う．本稿では, 連続性と同じく重要な, (E) のコンパクト性に関する以下の問題を扱う：

問題

変動指数 Sobolev の埋め込み (E) のコンパクト性と, 原点に於ける q の 2^* への接触レートはどのような関係をもつか.

なお「(E) がコンパクトである」とは

$H_0^1(\Omega)$ における任意の有界列 (u_n) が $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ における強収束部分列をもつ

場合をいう.

変動指数埋め込み (E) のコンパクト性はさまざまな応用をもつ．例えば, 半線型楕円型方程式

$$
\text{(P)} \quad \begin{cases} -\Delta u &= u|u|^{q(\cdot)-2} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}
$$

の非自明解の存在は, (E) のコンパクト性と密接な関係をもつ (定数指数の場合は例えば Struwe [9, Chapter 3] を, 変動指数の場合は Kurata-Shioji [4], Mizuta-Ohno-Shimomura-Shioji [6] を見よ). 実際, Ω を球とすると, 定数指数 $q(\cdot) \equiv 2^*$ に対し, (E) のコンパクト性は破れているが, これを反映し, (P) は非自明解を持たないことが知られている (例えば Struwe [9, Chapter 3] を見よ).

また電磁流体の数理モデルにおける応力テンソルの高次展開項として, 変動指数 $p(\cdot)$ をもつ発散型微分作用素

$$
\nabla \cdot \left((1 + |\nabla u(x)|^2)^{\frac{p(\cdot)-2}{p(\cdot)}} \nabla u(x) \right)
$$

が現れる．変動指数関数空間に対するその他の動機付けについては, 例えば Radulescu-Repovs [7] §1.1 を参照のこと.

既存の結果　$q(\cdot)$ が Ω 上一様に劣臨界である変動指数の場合の (E) のコンパクト性, すなわち

$$
\inf_{\Omega}(2^* - q(\cdot)) > 0 \text{ ならば (E) はコンパクトである} \tag{1.2}
$$

ことは, 例えば Kovacik-Rakosnik [5, Theorem 3.8] にある．一方 $q(\cdot)$ が Ω で臨界指数に達する場合の研究は Kurata-Shioji [4] により開始された．彼らの結果を述べるために,

$$
r(x) := 2^* - q(x)
$$

とおき, (Q) を $r = 2^* - q$ に対して書き直した条件

$$
\text{(R)} \qquad r(0) = 0, \quad r(x) > 0 \text{ for } x \neq 0, \quad r(x) < 2^* - 1 \text{ for all } x \in \Omega
$$

を仮定する．さらに (E) のコンパクト性に関連する, r に対する以下の条件を導入する (ただし $l \in \mathbb{R}$)：

$$
\text{(NC)} \quad \limsup_{|x|\to 0} r(x) \ln \frac{1}{|x|} < \infty,
$$

$$
\text{(C)}_l \quad \liminf_{|x|\to 0} r(x) \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^l > 0.
$$

Kurata-Shioji は [4] において以下の結果を得た：

命題 1.1 (Kurata-Shioji [4])
(a) (NC) が成り立つならば, (E) はコンパクトでない.
(b) ある $l \in (0,1)$ が存在して $(\mathrm{C})_l$ が成り立つならば, (E) はコンパクトである. ∎

この結果は Mizuta-Ohno-Shimomura-Shioji [6] により, 埋め込み $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ の場合に一般化されている. また, 同じ論文において, ある $n \in \mathbb{N}$ に対する条件

$$(\mathrm{C'})_n \quad \liminf_{|x|\to 0} r(x) \frac{\ln \frac{1}{|x|}}{\ln^n \frac{1}{|x|}} > 0$$

の下での (E) のコンパクト性が示されている [6, Corollary 3.5] (ただし $\ln^n$ は n 重対数関数を表す).

主結果　本稿の主結果は, 既存の結果の仮定 $(\mathrm{C})_l$, $(\mathrm{C'})_n$ よりも弱い仮定

$$(\mathrm{C}) \quad \lim_{|x|\to 0} r(x) \ln \frac{1}{|x|} = \infty$$

の元での (E) のコンパクト性を主張する以下の定理である：

定理 1.1
(C) の下で (E) はコンパクトである. ∎

上の主定理におけるコンパクト性条件 (C) は, 命題 1.1 (a) における非コンパクト性条件 (NC) の観点からは「ほとんど最良」であることに注意する. また, r の条件について

$$\begin{aligned} |r(x)| \ln \frac{1}{|x|} \quad &\geq \quad \begin{cases} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{1-l}, \ l \in (0,1) & \text{if } (\mathrm{C})_l \\ \ln^n \frac{1}{|x|} & \text{if } (\mathrm{C'})_n \end{cases} \\ &\to \quad \infty \end{aligned}$$

as $|x| \to 0$ であるので

$$(\mathrm{C})_l \text{ for some } l \in (0,1) \ \Rightarrow \ (\mathrm{C'})_n \text{ for some } n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ (\mathrm{C})$$

が成り立つ.
Kurata-Shioji [4] (及び Mizuta-Ohno-Shimomura-Shioji [6]) では, 命題 1.1 (b) を, 条件 $(\mathrm{C})_l$ を用いた積分の, 精密な定量的評価により導出している. 本稿では, 上の主定理を, 定数指数の場合の Sobolev の埋め込み $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ に対するプロファイル分解を用いた定性的議論により導く.

記号　変動指数 $p(\cdot)$ に対する Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\omega)$ のノルムを $\|u\|_{p,\omega}$ と書く. 領域 ω が Ω である場合, $\|u\|_{p(\cdot)}$ と表記する. $B_R(a)$ により, $\mathbb{R}^N$ における中心 a, 半径 R の開球を表す. 断りのない限り $\int f$ で $\int_\Omega f$ を表す. また $H_0^1(\Omega)$-関数の $\mathbb{R}^N$ へのゼロ拡張を同じ記号で書く. 部分列を取る操作は明示せずに行う.

2　問題の数理的背景とプロファイル分解及び本稿のアプローチ

2.1　定数指数 Sobolev の埋め込みのコンパクト性の数理的背景

$\mathbb{R}^N$ におけるコンパクト性定理 (Bolzano-Weierstrass の定理)

$$\mathbb{R}^N \text{ の任意の有界列は収束する部分列を含む} \tag{2.1}$$

は, $\mathbb{R}^N$ におけるさまざまな存在定理の背景にある基本的定理 (すなわち一種のメタ定理) であり, これがその他の位相ベクトル空間でも成立するかを問うことは基本的である. 例えば, 偏微分方程式の解の存在と挙動を現代数学的な枠組みで扱おうとすると, 基礎空間として Banach 空間が自然に現れるが, 無限次元 Banach 空間においては, 強収束の意味では (2.1) は成り立たないことが知られており, このことは現代数学的枠組みのもとで偏微分方程式を解析する際に様々な困難 (もしくは興味深い現象) を引き起こす. 上記の事実は, 無限次元位相ベクトル空間において (2.1) に対応するコンパクト性定理を得るには, 主張における位相として, 強位相より弱いものを考える必要があることを示唆する. この方向の探求には大きく分けて二つの方向性があり得る.

一つは抽象的な方向性であって, (2.1) が成立する「適切な位相」がどのようなものかを抽象的に探求する方向である. 実際, 例えば回帰的 Banach 空間では位相の意味を弱位相に取り換えれば (2.1) に対応する結果が得られることが知られている.

もう一つは具体的な方向性であって, 偏微分方程式の解析などに現れる具体的な関数空間の埋め込みに関するコンパクト性を論じるものである [1]. (E) のコンパクト性の探求は, このような方向性の探求の一例である.

Sobolev の埋め込みのコンパクト性と非コンパクト性の数理的背景　以下まず $\mathbb{R}^N$ 上の関数空間を考える. Sobolev 空間 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ 及びそのノルム $\|\cdot\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)}$ を

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^N) := \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\nabla\cdot\|_{2,\mathbb{R}^N}}, \quad \|u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)} := \|\nabla u\|_{2,\mathbb{R}^N}$$

により定める. 以下はよく知られている (例えば [1, Theorem IX.9]) :

命題 2.1

定数指数 Sobolev の埋め込み

$$\text{(S)} \quad \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

は有界 (よって連続) だが非コンパクトである. ∎

命題 2.1 は領域 $\mathbb{R}^N$ に作用する非コンパクト群 $D := \{D_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}_+\}$, ただし

$$D_\lambda : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbb{R}^N,$$

に密接に関係する. 実際, D に付随して $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ 上の変換群 $\widehat{D} := \{\widehat{D}_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ を

$$\widehat{D}_\lambda u(x) := \lambda^{\frac{N-2}{2}} u(D_\lambda x) (= \lambda^{\frac{N-2}{2}} u(\lambda x)) \tag{2.2}$$

で定めると, 容易に

$$\|\nabla \widehat{D}_\lambda u\|_{2,\mathbb{R}^N} = \|\nabla u\|_{2,\mathbb{R}^N}, \quad \|\widehat{D}_\lambda u\|_{p,\mathbb{R}^N} = \lambda^{-N\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)} \|u\|_{p,\mathbb{R}^N} \tag{2.3}$$

が成り立つことが示される. 従って

$$\frac{\|\widehat{D}_\lambda u\|_{p,\mathbb{R}^N}}{\|\nabla \widehat{D}_\lambda u\|_{2,\mathbb{R}^N}} = \lambda^{-N\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)} \frac{\|u\|_{p,\mathbb{R}^N}}{\|\nabla u\|_{2,\mathbb{R}^N}}$$

[1] もとより抽象的方向性に基づく探求と具体的方向性に基づく探求は密接な関係をもつ.

であるので, 埋め込み $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ が有界であるための必要条件は $p = 2^*$ となる. 以上から,

埋め込みの有界性を保証する条件 $p = 2^*$ は, $\|\cdot\|_p$ が $\widehat{D}$ のもとで不変である条件

に他ならないことに注意する. 一方 $p = 2^*$ のとき, 上の不変性のために必然的に

$$\text{埋め込み (S) は非コンパクト} \tag{2.4}$$

となる. 実際, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ と,

$$\lambda_n \to \infty \quad \text{または} \quad \lambda_n \to 0 \tag{2.5}$$

as $n \to \infty$ を満たす任意の $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$ を固定し,

$$u_n := \widehat{D}_{\lambda_n} \varphi \tag{2.6}$$

とすると (2.3) より $\|\nabla u_n\|_{2,\mathbb{R}^N} = \|\nabla \varphi\|_{2,\mathbb{R}^N}$ であるので

$$(u_n) \text{ は } \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \text{ での有界列}$$

である. ここで結論 (2.4) が成り立たない, すなわち

$$\text{(S) はコンパクトである}$$

とすると, これより (u_n) のある部分列と $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ があって

$$u_n \to u \text{ in } L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \tag{2.7}$$

as $n \to \infty$ となる. 一方 (2.3) より

$$\|u_n\|_{2^*,\mathbb{R}^N} = \|\varphi\|_{2^*,\mathbb{R}^N} > 0$$

であるので,

$$\|u\|_{2^*,\mathbb{R}^N} = \|\varphi\|_{2^*,\mathbb{R}^N} > 0 \tag{2.8}$$

でなくてはならない. 一方, (2.6), (2.5) より容易に

$$u_n(x) \to 0 \tag{2.9}$$

as $n \to \infty$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ であるので, (2.7) より $u = 0$ が従うが, これは (2.8) に矛盾する. よって (2.4) が成立する.

以上の議論は

有界性とコンパクト性の相補的関係

> 非コンパクト群作用 (上では D) の下で不変な領域 (上では $\mathbb{R}^N$) 上の関数空間について, 関数空間の間の埋め込みの有界性には上記群作用が関数空間上に誘導する非コンパクト群 (上では $\widehat{D}$) の下でのノルムの等長性が必要であるが, この等長性自体が埋め込みのコンパクト性を破壊する

という事情を示唆する.

なお上より, 埋め込み (S) の非コンパクト性の原因が埋め込み (S) の有界性を保証する「非コンパクト群の下でのノルムの等長性」にあることを考えれば,

- 領域を $\mathbb{R}^N$ から (例えば) 有界領域に摂動する,
- 指数を 2^* から $p < 2^*$ に摂動する

などによって, 基準となる関数空間における非コンパクト群作用を埋め込みの有界性が保存される程度にうまく壊すことができれば, 埋め込みのコンパクト性が得られることが期待される. 実際にいくつかの仮定のもとでこれは可能であることが知られている [2] (Rellich の定理, 例えば [1, Theorem IX.16] を見よ).

本稿では

「指数」を「場所ごとに摂動する」ことにより Sobolev の埋め込み (S) の非コンパクト構造がどのように壊れるか

を考察する.

変動指数空間への埋め込み (E) のコンパクト性と非コンパクト性：予備的考察　変動指数の場合を考察するため, 非コンパクト群作用 (2.2) の下で, $L^{q(\cdot)}$ に自然に付随する汎函数

$$\int |u|^{q(\cdot)}$$

がどのように反応するかを見る.

数列 $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$ を

$$\lambda_n \to \infty \ \text{ as } n \to \infty$$

を満たす列とし, $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ に対し関数 u_n を (2.6) で定められるものとする. このとき

$$u_n(x) \to 0 \text{ a.e. } x \in \Omega \tag{2.10}$$

as $n \to \infty$ に注意する. 一方

$$\begin{aligned}
\int |u_n(x)|^{q(\cdot)}dx &= \int \lambda_n^{\frac{N-2}{2}(2^*-r(x))}|\varphi(\lambda_n x)|^{q(x)}dx = \int \lambda_n^{\frac{N-2}{2}\left(2^*-r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)\right)}|\varphi(y)|^{q\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)}\frac{dy}{\lambda_n^N} \\
&= \int \lambda_n^{-\frac{N-2}{2}r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)}|\varphi(y)|^{q\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)}dy = \int e^{-\frac{N-2}{2}r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)\ln\lambda_n}|\varphi(y)|^{q\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)}dy \\
&=: \int f_n(y)|\varphi(y)|^{q\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)}dy =: (\mathrm{I}).
\end{aligned}$$

ここで

$$g_n(y) := \ln f_n(y) = -\frac{N-2}{2}r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)\ln\lambda_n$$

とおく.

---

[2] 同様のことは $\mathbb{R}^N$ に作用する別の非コンパクト群作用 (平行移動) を, 関数空間上にリフトして得られる群作用

$$T_y u(\cdot) := u(\cdot - y), \quad y \in \mathbb{R}^N$$

についても考えられる.

まず Kurata-Shioji [4] による (E) の非コンパクト性についての議論 (本稿の Proposition 1.1 (a) を見よ) を復習する. (NC) を仮定すると, $y \in B_1(0)$ について一様に

$$
\begin{aligned}
g_n(y) &= -\frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln \lambda_n \\
&= -\frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln \frac{\lambda_n}{|y|} - \frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln |y| \\
&\geq -\frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln \frac{\lambda_n}{|y|} \geq -C
\end{aligned}
$$

as $n \to \infty$ (ただし $C > 0$ は適当な定数) が成り立つので, Lebesgue の有界収束定理より

$$
(\mathrm{I}) \geq e^{-C} \int_{B_1(0)} |\varphi(y)|^{2^*}.
$$

が従う. これと (2.10) を用いれば, (2.4) を導いたものと同様の議論により (NC) のもとでは (E) は非コンパクトであること, すなわち命題 1.1 (a) が従う.

次に, (NC) と「ほとんど背反」である条件 (C) を仮定する. $R > 0$ をとり, $y \in B_R(0)$ とする.
まず (I) における被積分関数の劣可積分性を見る.

$$
g_n(y) = -\frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln \lambda_n \leq 0
$$

より

$$
f_n(y) = e^{-\frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln \lambda_n} \leq 1,
$$

よって

$$
f_n(y) |\varphi(y)|^{q\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)} \leq |\varphi(y)|^{q\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)} \leq \max\left(1, |\varphi(y)|^{2^*}\right) \in L^1(B_R(0)) \tag{2.11}
$$

が成り立つ. すなわちこの凝集部分の L^1-可積分性を得るには, 凝集プロファイル φ の無限遠での挙動の制御が必要となり, そのために

$$
\text{有界領域 } B_R(0) \text{ 上で考える必要} \tag{2.12}
$$

がある.

次に被積分関数の a.e. 収束を考える. (C) より

$$
\begin{aligned}
g_n(y) &= -\frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln \lambda_n \\
&= -\frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln \frac{\lambda_n}{|y|} - \frac{N-2}{2} r\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) \ln |y| \\
&\to -\infty + r(0) = -\infty
\end{aligned}
$$

as $n \to \infty$ a.e. $y \in B_R(0)$. これより

$$
f_n(y) = e^{g_n(y)} = o(1)
$$

as $n \to \infty$ a.e. $y \in B_R(0)$ が従う. これと (2.11) 及び Lebesgue の有界収束定理より

$$
\int_{B_{\frac{R}{\lambda_n}}(0)} |u_n|^{q(\cdot)} = \int_{B_R(0)} f_n(y) |\varphi(y)|^{q\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)} dy = o(1)
$$

が成り立つので, $n \to \infty$ のときの (u_n) の凝集点である原点近傍の, (u_n) の $L^{q(\cdot)}$ ノルムはゼロに収束する.

以上の議論は「(2.6) で定められる (u_n) について, 原点での凝集による非コンパクト性は条件 (C) で破壊できる」ことは示唆するものの, 定理 1.1 を示すには全く十分ではない. 実際,

困難 (A)：凝集の無限遠での制御の困難

(2.6) で定められる (u_n) の原点から離れたところでの挙動が不明 ((2.12) を見よ)

である. さらに, この困難が克服され, $\int |u_n|^{q(\cdot)} \to 0$ が示されたとしても, 上の議論からは「(u_n) が (2.6) の形であれば $\int |u_n|^{q(\cdot)} \to 0$ が成り立つ」ことがわかるだけであって,

困難 (B)：非コンパクト列の一般的挙動に対する困難

そもそも (E) の非コンパクト性を与ええる**全ての**列 (u_n) が (2.6) またはその重ね合わせで書けるかが不明

である.

Kurata-Shioji [4] (及び Mizuta-Ohno-Shimomura-Shioji [6]) ではこれらの困難を解決するため, 変動指数 $q(\cdot)$ の原点付近の挙動について (C) より強い条件 $(\mathrm{C})_l$ を課し, 積分 $\int |u_n|^{q(\cdot)}$ を, 原点を中心とする無限個の互いに素な円環領域上へ分割し, 各々の積分量を $(\mathrm{C})_l$ を用いて精密に評価する手法を取っている.

2.2 プロファイル分解 – 定数指数埋め込み (S) の非コンパクト性の一般的起源と, 変動指数埋め込み (E) に対する本稿のアプローチ

本稿でとる手法は前 subsection で紹介した Kurata-Shioji [4] の手法とは異なり, 前 subsection で挙げた困難 (A), (B) を正面から取り扱うアプローチを取る. 実は Sobolev の埋め込み (S) に付随する非コンパクトな列は標準形を持つことが知られている：

命題 2.2 (プロファイル分解, Gérard-Jaffard, [3, Theorem 1], [2])
$(u_n) \subset \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ を有界列とすると, 部分列と

- スケール列の可算族 $(\lambda_n^j)_n$ $(j = 1, \cdots)$,
- 凝集点列の可算族 $(x_n^j)_n \subset \mathbb{R}^N$ $(j = 1, \cdots)$,
- 凝集プロファイルの可算族 $\varphi_j \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ $(j = 1, \cdots)$

があって $\varphi_{n,j}(x) := (\lambda_n^j)^{\frac{N-2}{2}} \varphi_j(\lambda_n^j(x - x_n^j))$ に対して以下が成り立つ：
(a) (λ_n^j, x_n^j) は j について互いに orthogonal, すなわち $i \neq j$ を満たす任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について

$$\max\left(\frac{\lambda_n^j}{\lambda_n^i}, \frac{\lambda_n^i}{\lambda_n^j}, \frac{|x_n^i - x_n^j|}{\lambda_n^i + \lambda_n^j}\right) \to \infty$$

as $n \to \infty$.
(b) 任意の $l \in \mathbb{N}$ について $u_n = \sum_{j=1}^{l} \varphi_{n,j} + r_n^l$ とおくと

$$\lim_{l \to \infty} \lim_{n \to \infty} \|r_n^l\|_{2^*} = 0,$$

が成り立つ. ∎

上の形の主張はまず Solimini [8] によって得られ, その後多くの研究者によって様々な関数空間に拡張されている.

(2.4) において, (λ_n) を $\lambda_n \to \infty$ となる列とすると

$$u_n := \widehat{D}_{\lambda_n}\varphi \;\Rightarrow\; (u_n) \text{ は非コンパクト}$$

であることを示したが, 上の命題は, 無限個の重ね合わせを許せばこの逆が成り立つことを主張している. 本稿では上記の困難 (A), (B) を上の命題を用いることで克服する. 実際命題 2.2 にある重ね合わせ表現により (B) は解決され, (A) は,「命題 2.2 に於ける凝集プロファイル φ_j が L^{2^*}-関数である」ことを用いて解決される.

命題 2.2 の記号の下で, 以下が成立することを示して本節を終える：

命題 2.3

(R) を仮定する. 任意の $\rho > 0$, $R > 0$ 及び $j \in \mathbb{N}$ をとる. このとき以下が成立する：

$$(\lambda_n^j) \text{ または } (x_n^j) \text{ が非有界である}$$

とする. このとき必要なら部分列を取って,

$$\int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \;=\; o(1) \tag{2.13}$$

as $n \to \infty$ が成り立つ. ∎

命題 2.3 の証明.

部分列に沿って $\lambda_n^j \to \lambda^j = 0$ である場合, $\lambda_n^j \to \lambda^j \in (0,\infty)$ である場合, $\lambda_n^j \to \lambda^j = \infty$ である場合に分けて考える.

Case I. 部分列に沿って $\lambda_n^j \to \lambda^j = 0$ である場合.

$$\begin{aligned} &\int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \leq \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{2^*} \\ \leq\;& \int_{B_\rho(0)} |\varphi_{n,j}|^{2^*} = \int_{\lambda_n^j(B_\rho(0)-x_n^j)} |\varphi_j|^{2^*} = \int_{B_{\lambda_n^j\rho}(-\lambda_n^j x_n^j)} |\varphi_j|^{2^*} \end{aligned} \tag{2.14}$$

に注意する.

Case I-1. 部分列が存在して $|\lambda_n^j x_n^j| \to \infty$ as $n \to \infty$ である場合.

このとき任意の $\sigma > 0$ に対して

$$B_{\lambda_n^j\rho}(-\lambda_n^j x_n^j) \subset B_\sigma(0)^c$$

が十分大きな n について成り立つ. よって (2.14) より

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \leq \int_{B_\sigma(0)^c} |\varphi_j|^{2^*}$$

が任意の $\sigma > 0$ について成り立つので, $\sigma \to 0$ として

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} = 0$$

となるので (2.13) が成り立つ.

Case I-2. ある $C > 0$ に対して $|\lambda_n^j x_n^j| < C$ が成り立つ場合.

必要なら部分列を取って

$$-\lambda_n^j x_n^j \to x^j \in \mathbb{R}^N \tag{2.15}$$

as $n \to \infty$ としてよい. 任意に $\sigma > 0$ をとる. このとき Case I の仮定と (2.15) より充分大きな n に対して

$$B_{\lambda_n^j \rho}(-\lambda_n^j x_n^j) \subset B_\sigma(x^j)$$

が成り立つ. これより

$$\int_{B_{\lambda_n^j\rho}(-\lambda_n^j x_n^j)} |\varphi_j|^{2^*} \leq \int_{B_\sigma(x^j)} |\varphi_j|^{2^*},$$

よって (2.14) より

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \leq \int_{B_\sigma(x^j)} |\varphi_j|^{2^*}$$

であるので, $\sigma \to 0$ として (2.13) が成り立つ.

Case II. 部分列に沿って $\lambda_n^j \to \lambda^j \in (0,\infty)$ である場合.

このとき仮定より (x_n) は非有界としてよい. よって部分列に沿って

$$\lambda_n^j \to \lambda^j < \infty, \quad |x_n^j| \to \infty$$

as $n \to \infty$ が成り立つ. これより任意の $\sigma > 0$ に対し, 充分大きな任意の n について

$$B_\rho(0) \subset B_{\frac{\sigma}{\lambda_n^j}}(x_n^j)^c$$

となる. 従って

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)} |\varphi_{n,j}|^{2^*} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_{\frac{\sigma}{\lambda_n^j}}(x_n^j)^c} |\varphi_{n,j}|^{2^*} = \int_{B_\sigma(0)^c} |\varphi_j|^{2^*}
\end{aligned}$$

であるので, $\sigma \to \infty$ として (2.13) が成り立つ.

Case III. 部分列に沿って $\lambda_n^j \to \lambda^j = \infty$ である場合.

Case III-1. $x_n^j \to 0$ でない場合.

このときさらに部分列をとって, ある $\delta > 0$ に対して

$$|x_n^j| \geq \delta > 0$$

が任意の n について成り立つとしてよい. これと $\lambda_n^j \to \infty$ より

$$B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j) \subset B_\delta(0)^c \subset \Omega \setminus \{0\}$$

が充分大きな n について成り立つので, こうした n に対して (R) より

$$\sup_{B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} q \leq q_* := \sup_{B_\delta(0)^c} q < 2^* \tag{2.16}$$

が成り立つ. よって

$$\int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \leq \int_{B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q_*} = (\lambda_n^j)^{\frac{N-2}{2}q_*-N} \int_{B_R(0)} |\varphi^j|^{q_*} \tag{2.17}$$

を得る. ここで (2.16) と $\lambda_n^j \to \infty$ より

$$(\lambda_n^j)^{\frac{N-2}{2}q_*-N} = \frac{1}{(\lambda_n^j)^{\frac{N-2}{2}(2^*-q_*)}} \to 0$$

as $n \to \infty$ であるので

$$(2.17) = o(1)$$

as $n \to \infty$, すなわち (2.13) を得る.

Case III-2. $x_n^j \to 0$ の場合.

このとき

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \\
\leq\ &\int_{B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |(\lambda_n^j)^{\frac{N-2}{2}}\varphi_j(\lambda_n^j(x-x_n^j))|^{2^*-r(x)}dx \\
=\ &\int_{B_R(0)} e^{\left[\frac{N-2}{2}\left(2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)\right)-N\right]\ln\lambda_n^j} |\varphi_j(y)|^{2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)}dy \\
=:\ &\int_{B_R(0)} f_{n,j}(y)|\varphi_j(y)|^{2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)}dy
\end{aligned} \tag{2.18}$$

が成り立つ. $\ln\lambda_n^j > 0$ for large n とあわせて, $y \in B_R(0)$ について一様に

$$\left[\frac{N-2}{2}\left(2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)\right)-N\right]\ln\lambda_n^j = -\frac{N-2}{2}r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)\ln\lambda_n^j \leq 0$$

for large n. これより

$$f_{n,j} \leq 1 \text{ in } B_R(0)$$

for large n が成り立つ. よって

$$f_{n,j}(y)|\varphi_j(y)|^{2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)} \leq \max(1,|\varphi_j(y)|^{2^*}) \in L^1(B_R(0)). \tag{2.19}$$

次に係数関数 $f_{n,j}(\cdot)$ の各点評価を行う.

$$\frac{N-2}{2}\left(2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)\right)-N=-\frac{N-2}{2}r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)$$

より

$$\begin{aligned} f_{n,j}(y) &= e^{\left[\frac{N-2}{2}\left(2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)\right)-N\right]\ln\lambda_n^j} \\ &\leq e^{-\frac{N-2}{2}\frac{\ln\lambda_n^j}{\ln\frac{1}{\left|x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right|}}\left[r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)\ln\frac{1}{\left|x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right|}\right]}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

以下

$$\frac{\ln\lambda_n^j}{\ln\frac{1}{\left|x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right|}}=\frac{\ln\lambda_n^j}{\ln\frac{\lambda_n^j}{|\lambda_n^j x_n^j+y|}}\geq 1+o(1) \text{ a.e. } y\in B_R(0) \tag{2.21}$$

as $n\to\infty$ が成り立つことを示す.

実際, まず $|\lambda_n^j x_n^j+y|\geq 1$ とすると,

$$\ln\lambda_n^j-\ln|\lambda_n^j x_x+y|\leq\ln\lambda_n^j,$$

よって

$$\frac{\ln\lambda_n^j}{\ln\frac{\lambda_n^j}{|\lambda_n^j x_n^j+y|}}\geq 1.$$

次に n の部分列に沿って $|\lambda_n^j x_n^j+y|\leq 1$ であるとすると, n について部分列を取って $\lambda_n^j x_n^j\to y^j\in\mathbb{R}^N$ となる. $y\neq -y^j$ である y を取り固定すると

$$\begin{aligned} \frac{\ln\lambda_n^j}{\ln\frac{\lambda_n^j}{|\lambda_n^j x_n^j+y|}} &= \frac{\ln\lambda_n^j}{\ln\lambda_n^j-\ln|\lambda_n^j x_n^j+y|}=\frac{\ln\lambda_n^j}{\ln\lambda_n^j-\ln|y^j+y|}+o(1) \\ &= 1+o(1) \text{ a.e. } y\neq -y^j,\ y\in B_R(0) \end{aligned}$$

as $n\to\infty$ となるので (2.21) を得る.

$\lambda_n^j\to\infty$ と $x_n^j\to 0$ より, $y\in B_R(0)$ について一様に

$$x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}=o(1) \text{ as } n\to\infty \text{ uniformly in } y\in B_R(0) \tag{2.22}$$

が成り立つ. これと (C) より

$$r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)\ln\frac{1}{\left|x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right|}\to+\infty$$

as $n\to\infty$. 以上と (2.20) より

$$f_{n,j}(y)=o(1)\text{ a.e. } y\neq -y^j,\ y\in B_R(0) \tag{2.23}$$

as $n\to\infty$. また (R) と (2.22) より

$$|\varphi_j(y)|^{2^*-r\left(x_n^j+\frac{y}{\lambda_n^j}\right)}=|\varphi_j(y)|^{2^*}+o(1)\text{ a.e. } y \tag{2.24}$$

as $n\to\infty$.

以上 (2.18), (2.19), (2.23), (2.24) と Lebesgue の有界収束定理より,

$$\int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)}|\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)}=o(1)$$

as $n\to\infty$, すなわち (2.13) が成り立つ. ∎

3 主定理の証明

3.1 準備

以下定理 1.1 の証明に必要な事項を準備する. $p\in C(\Omega;(1,\infty))$ とする.
まず [7, p.9] より

$$\overline{p}:=\sup_\Omega p,\quad \underline{p}:=\inf_\Omega p$$

とすると, $u\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ に対して modular inequality

$$\min\left(\|u\|_{p(\cdot)}^{\underline{p}},\|u\|_{p(\cdot)}^{\overline{p}}\right)\leq\int|u|^{p(\cdot)}\leq\max\left(\|u\|_{p(\cdot)}^{\underline{p}},\|u\|_{p(\cdot)}^{\overline{p}}\right) \tag{3.1}$$

が成り立つことに注意する. これより, 定理 1.1 を示すには以下を示せばよい:

命題 3.1
$(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ を有界で $u_n\rightharpoonup 0$ in $H_0^1(\Omega)$ を満たす列とする. このとき

$$\int|u_n|^{q(\cdot)}=o(1)$$

as $n\to\infty$ が成り立つ. ∎

実際 (u_n) を $H_0^1(\Omega)$ の有界列で $u_n\rightharpoonup u$ weakly in $H_0^1(\Omega)$ を満たす列とする. このとき $w_n:=u_n-u$ は命題 3.1 の仮定において u_n を w_n に置き換えたものを満たす. よって命題 3.1 より

$$\int|u_n-u|^{q(\cdot)}=\int|w_n|^{q(\cdot)}=o(1)$$

である. これと (3.1) より

$$\min\left(\|u_n-u\|_{q(\cdot)}^{\underline{q}},\|u_n-u\|_{q(\cdot)}^{\overline{q}}\right)\leq\int|u_n-u|^{q(\cdot)}=o(1)$$

であるので $\|u_n-u\|_{q(\cdot)}=o(1)$ as $n\to\infty$, よって定理 1.1 が従う.

以下命題 3.1 を示す.

3.2　命題 3.1 の証明

Step 1. 準備　(u_n) を $H_0^1(\Omega)$ の有界列で

$$u_n \rightharpoonup 0 \text{ in } H_0^1(\Omega) \tag{3.2}$$

を満たすものとする.

$$|B_{\overline{\rho}}(0)| + \overline{\varepsilon} < 1 \text{ and } B_{\overline{\rho}}(0) \subset \Omega$$

を満たす任意の $\overline{\rho} > 0$, $\overline{\varepsilon} > 0$ を取る. すると

$$|B_\rho(0)| + \varepsilon < 1 \text{ and } B_\rho(0) \subset \Omega \text{ for any } \rho \in (0, \overline{\rho}) \text{ and } \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}) \tag{3.3}$$

が成り立つ. このような $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ をとる.

上でとった $\varepsilon > 0$ に対し, 命題 2.2 (b) より, ある j_0 と $N = N(j_0)$ が存在して, 任意の $n > N(j_0)$ について

$$\|r_n^{j_0}\|_{2^*,\mathbb{R}^N}^{2^*} = \left\| u_n - \sum_{j=1}^{j_0} \varphi_{n,j} \right\|_{2^*,\mathbb{R}^N}^{2^*} \leq \varepsilon \tag{3.4}$$

が成り立つ.

Step 2. 外部領域での収束　以下 $B_\rho(0)$ と $B_\rho(0)^c$ に分けて考える：

$$\int_\Omega |u_n|^{q(\cdot)} = \int_{\Omega \cap B_\rho(0)^c} |u_n|^{q(\cdot)} + \int_{B_\rho(0)} |u_n|^{q(\cdot)}.$$

$B_\rho(0)^c$ 上で (R) より

$$q^* := \sup_{B_\rho(0)^c} q(\cdot) = 2^* - \inf_{B_\rho(0)^c} r(\cdot) < 2^*$$

なので, (1.2) より $H^1(B_\rho(0)^c) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(B_\rho(0)^c)$ はコンパクトである. よって modular inequality (3.1) と (3.2) より

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega \cap B_\rho(0)^c} |u_n|^{q(\cdot)} = 0 \tag{3.5}$$

であるので

$$\int_\Omega |u_n|^{q(\cdot)} = \int_{B_\rho(0)} |u_n|^{q(\cdot)} + o(1)$$

as $n \to \infty$ が成り立つ. 以下 $\int_{B_\rho(0)} |u_n|^{q(\cdot)} = o(1)$ を示す.

Step 3-1. 内部領域での評価 I. 主要部の評価 ($j \leq j_0$)　任意の $j \leq j_0$ (j_0 は Step 1 で固定したもの), $R > 0$ をとる.

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(0)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} &\leq \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\leq 1\}} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} + \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \\
&\leq |B_\rho(0)| + \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)^c} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \\
&\quad + \int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで右辺第二項について

$$\int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)^c}|\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \leq \int_{B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)^c}|\varphi_{n,j}|^{2^*} = \int_{B_R(0)^c}|\varphi_j|^{2^*} \tag{3.7}$$

が成り立つ. 右辺第三項については以下が成立する. いま

$$(\lambda_n^j),\ (x_n^j)\ \text{がそれぞれ有界となる部分列が存在する} \tag{3.8}$$

とすると, この部分列に沿って $x_n^j \to x^j$ を仮定できるので,

$$\varphi_{n,j} - (\lambda^j)^{\frac{N-2}{2}}\varphi_j(\lambda^j(\cdot - x^j)) = o(1) \text{ strongly in } L^{2^*}$$

as $n\to\infty$ が成り立つ. これと命題 2.2 (a) におけるスケール (λ_n^j, x_n^j) の直交性より,

$$u_n \rightharpoonup (\lambda^j)^{\frac{N-2}{2}}\varphi_j(\lambda^j(x-x^j)) \neq 0 \text{ weakly in } L^{2^*}$$

as $n\to\infty$ となるので, 仮定 $u_n \rightharpoonup 0$ in L^{2^*} に反する. 以上より (3.8) 起こらない. よって命題 2.3 より, 必要なら j_0 回部分列を取って, 任意の $j\leq j_0$ に対して

$$\int_{B_\rho(0)\cap\{\varphi_{n,j}\geq 1\}\cap B_{\frac{R}{\lambda_n^j}}(x_n^j)}|\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \quad = \quad o(1)$$

as $n\to\infty$ が成り立つ.

これと (3.6), (3.7) より,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_\rho(0)}|\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \leq |B_\rho(0)| + o(1) + \int_{B_R(0)^c}|\varphi_j|^{2^*} = |B_\rho(0)| \quad (R\to\infty) \tag{3.9}$$

が任意の $j\leq j_0$ について成り立つ.

Step 3-2. 内部領域での評価 II. 結論 $r_n^{j_0} := u_n - \sum_{j\leq j_0}\varphi_{n,j}$ とおく. このとき

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} &\leq \limsup_{n\to\infty}\|u_n - \sum_{j\leq j_0}\varphi_{n,j}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} \\ &\quad + \sum_{j\leq j_0}\limsup_{n\to\infty}\|\varphi_{n,j}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} \\ &=: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})\end{aligned} \tag{3.10}$$

となる.

(I) については modular inequality (3.1), (3.4) と (3.3) より

$$\begin{aligned}&\min\left(\|r_n^{j_0}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)}^{\underline{q}}, \|r_n^{j_0}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)}^{\overline{q}}\right) \leq \int_{B_\rho(0)}|r_n^{j_0}|^{q(\cdot)} \\ = \ &\int_{B_\rho(0)\cap\{r_n^{j_0}\leq 1\}}|r_n^{j_0}|^{q(\cdot)} + \int_{B_\rho(0)\cap\{r_n^{j_0}\geq 1\}}|r_n^{j_0}|^{q(\cdot)} \\ \leq \ &|B_\rho(0)| + \int_{B_\rho(0)\cap\{r_n^{j_0}\geq 1\}}|r_n^{j_0}|^{2^*} \leq |B_\rho(0)| + \int_{\mathbb{R}^N}|r_n^{j_0}|^{2^*} \\ \leq \ &|B_\rho(0)| + \varepsilon < 1\end{aligned} \tag{3.11}$$

for large n (ただし $\underline{q} := \inf_\Omega q$, $\overline{q} := \sup_\Omega q = 2^*$) が成り立つ. これより $\|r_n^{j_0}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} < 1$ であるので, 再び (3.11) より

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n - \sum_{j\le j_0} \varphi_{n,j}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} = \limsup_{n\to\infty} \|r_n^{j_0}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} \le (|B_\rho(0)| + \varepsilon)^{\frac{1}{\overline{q}}} \tag{3.12}$$

が従う.

(II) については modular inequality (3.1), (3.9) と (3.3) より

$$\min(\|\varphi_{n,j}\|^{\underline{q}}_{q(\cdot),B_\rho(0)}, \|\varphi_{n,j}\|^{\overline{q}}_{q(\cdot),B_\rho(0)}) \le \int_{B_\rho(0)} |\varphi_{n,j}|^{q(\cdot)} \le |B_\rho(0)| + o(1) < 1 \tag{3.13}$$

for large n が成り立つ. これより $\|\varphi_{n,j}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} < 1$ であるので, 再び (3.13) より

$$\limsup_{n\to\infty} \|\varphi_{n,j}\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} \le |B_\rho(0)|^{\frac{1}{\overline{q}}}$$

が従うので

$$(\mathrm{II}) \le j_0 |B_\rho(0)|^{\frac{1}{\overline{q}}} \tag{3.14}$$

が従う.

(3.10), (3.12) と (3.14) より

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{q(\cdot),B_\rho(0)} \le (|B_\rho(0)| + \varepsilon)^{\frac{1}{\overline{q}}} + j_0 |B_\rho(0)|^{\frac{1}{\overline{q}}}$$

が得られる. これと modular inequality (3.1) より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)} |u_n|^{q(\cdot)} &\le \max\left((\limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{q(\cdot),B_\rho(0)})^{\underline{q}}, (\limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{q(\cdot),B_\rho(0)})^{\overline{q}} \right) \\
&\le \max\left(\left((|B_\rho(0)| + \varepsilon)^{\frac{1}{\overline{q}}} + j_0 |B_\rho(0)|^{\frac{1}{\overline{q}}} \right)^{\underline{q}}, \left((|B_\rho(0)| + \varepsilon)^{\frac{1}{\overline{q}}} + j_0 |B_\rho(0)|^{\frac{1}{\overline{q}}} \right)^{\overline{q}} \right) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

を得る.

Step 4. 結論　以上より, 任意の $\rho \in (0, \overline{\rho})$ ((3.3) を見よ), $\varepsilon > 0$ に対して, (3.5), (3.15) より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(\cdot)} &\le \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega\cap B_\rho(0)^c} |u_n|^{q(\cdot)} + \limsup_{n\to\infty} \int_{B_\rho(0)} |u_n|^{q(\cdot)} \\
&\le \max\left(\left((|B_\rho(0)| + \varepsilon)^{\frac{1}{\overline{q}}} + j_0 |B_\rho(0)|^{\frac{1}{\overline{q}}} \right)^{\underline{q}}, \left((|B_\rho(0)| + \varepsilon)^{\frac{1}{\overline{q}}} + j_0 |B_\rho(0)|^{\frac{1}{\overline{q}}} \right)^{\overline{q}} \right)
\end{aligned}$$

が従う. $\rho \to 0$ として, 充分小さな任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(\cdot)} \le \max\left(\varepsilon^{\frac{\underline{q}}{\overline{q}}}, \varepsilon \right) \le \varepsilon$$

を得る. よって $\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(\cdot)} = 0$, すなわち結論を得る.

Acknowledgment.

本稿のベースとなった講演の機会を与えてくださった熊本大学応用解析セミナーの幹事の皆様, 及び参加者の皆様に感謝申し上げます.

参考文献

[1] Brezis, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599 pp.

[2] Gérard P. Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations* **3** (1998) 213-233. (Electronic version: http://www.emath.fr/cocv/).

[3] Jaffard, S. Analysis of the lack of compactness in the critical Sobolev embeddings. *J. Funct. Anal.*, **161** (2) (1999) 384-396.

[4] Kurata, K., Shioji, N. Compact embedding from $W_0^{1,2}(\Omega)$ to $L^{q(x)}(\Omega)$ and its application to nonlinear elliptic boundary value problem with variable critical exponent, *J. of Math. Anal. and Appl.* **339** (2008) 1386-1394.

[5] Kovacik, O., Rakosnik, J. On spaces of $L^{q(\cdot)}$ and $W^{k,q(\cdot)}$. Czechoslovak Math. J. **41** (1991) 592–618.

[6] Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno, Testu Shimomura and Naoki Shioji. Compact embeddings for Sobolev spaces of variable exponents and existence of solutions for nonlinear elliptic problems involving the $q(x)$-Laplacian and its critical exponent. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica,* **35** (2010) 115-130.

[7] Radulescu V., Repovs, D. Partial differential equations with variable exponents. CRC Press, 2015.

[8] Solimini, S. A note on compactness-type properties with respect to Lorentz norms of bounded subsets of a Sobolev space, *Ann. Inst. H. Poincaré* **12** No.3 (1995) 319-337.

[9] Struwe, M. Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Fourth edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 34. Springer-Verlag, Berlin, 2008. xx+302 pp.