3 次の非線形 SCHRÖDINGER 方程式系に対する終値問題

瓜屋 航太 (岡山理科大学理学部応用数学科) [1]

次の 3 次の非線形項を持つ非線形 Schrödinger 方程式系

$$\tag{1} \begin{cases} i\partial_t u_1 + \dfrac{1}{2m_1}\partial_x^2 u_1 = \overline{u}_1^2 u_2, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \\ i\partial_t u_2 + \dfrac{1}{2m_2}\partial_x^2 u_2 = u_1^3, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

および,

$$\tag{2} \begin{cases} i\partial_t u_1 + \dfrac{1}{2m_1}\partial_x^2 u_1 = \overline{u}_1 u_2^2, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \\ i\partial_t u_2 + \dfrac{1}{2m_2}\partial_x^2 u_2 = u_1^2 \overline{u}_2, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

を考察する. ただし, $u_1(t,x)$ と $u_2(t,x)$ は複素数値の未知関数であり, m_1 と m_2 は正の定数とする. 非線形 Schrödinger 方程式系 (2) は spinor Bose-Einstein 凝縮を記述するモデルとして現れることが知られている ([6]). 方程式系 (1), (2) に終値条件:

$$\sum_{j=1}^{2} \left\| u_j(t) - e^{\frac{it}{2m_j}\partial_x^2} u_{j+} \right\|_{L^2} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

を課し, その可解性を考察する. しかし, 一般には空間 1 次元で非線形項が 3 次の場合には非自明な解は存在しないことが知られている (Barab [1]). そこで, 何らかの意味で漸近形を修正する必要が生じる. 質量共鳴をもつ 2 次の非線形 Schrödinger 方程式系:

$$\tag{3} \begin{cases} i\partial_t u_1 + \dfrac{1}{2m_1}\Delta u_1 = \overline{u}_1 u_2, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2, \\ i\partial_t u_2 + \dfrac{1}{2m_2}\Delta u_2 = u_1^2, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

を 2 次元 Euclid 空間において考察した場合, Hayashi-Li-Naumkin [2] により修正された自由解に漸近する解の存在が示されている. 一方, 方程式系 (3) は L^2-保存則:

$$\tag{4} \frac{d}{dt}\Big\{ \|u_1(t)\|_{L^2}^2 + \|u_2(t)\|_{L^2}^2 \Big\} = 0$$

を満たすことから, 必ずしも各成分の持つ L^2-ノルムが保存しなくても良いことが分かる. 実際, Ogawa-Uriya [3] により時刻無限大で全ての L^2-ノルムが一方の成分に遷移する現象が起きることが示されている. 方程式系 (1), (2) は同様に L^2-保存則 (4) を満たすことから, ここでは 3 次の非線形項をもつ非線形 Schrödinger 方程式系 (1), (2) に対しても同様の L^2-

[1] uriya@xmath.ous.ac.jp

ノルムの遷移現象が起こるかを問題とし, 対応する質量共鳴条件の下で次の結果を得た. $m>0$ に対して L^2-不変な伸張作用素を $D(m)f := (im)^{-1/2}f(x/m)$ により表し, $D^*(m)$ をその共役作用素とする.

定理 a.1. $3m_1 = m_2$, $1/2 < s < 1$ とする. $\omega \in H^s(\mathbb{R})$, $\theta \in \dot{H}^s \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\|\omega\|_{H^s} < \varepsilon_1$ であり, ε_1 は十分小さい定数とする. そのとき, 十分大きな時刻 $T>0$ が存在して, 方程式系 (1) の解 $(u_1, u_2) \in (C([T,\infty); L^2))^2$ で, 次の漸近挙動を満たすものが存在する:

$$\left.\begin{aligned} &\left\| u_1(t) - e^{\frac{it}{2m_1}\partial_x^2}\mathcal{F}^{-1}D^*(m_1^{-1})i\left(\frac{1}{1+|\widehat{u}_{1+}|^4\log^2 t}\right)^{1/2}\widehat{u}_{1+}\right\|_{L^2} \to 0, \\ &\left\| u_2(t) - e^{\frac{it}{2m_2}\partial_x^2}(t)\mathcal{F}^{-1}D^*(m_2^{-1})\left(\frac{|\widehat{u}_{2+}|^4\log^2 t}{1+|\widehat{u}_{2+}|^4\log^2 t}\right)^{1/2}\widehat{u}_{2+}\right\|_{L^2} \to 0. \end{aligned}\right\} \quad (t\to\infty)$$

ここで, $\widehat{u}_{1+}(\xi) = \omega(\xi)e^{i\theta(\xi)}$, $\widehat{u}_{2+}(\xi) = \omega(\xi)e^{3i\theta(\xi)}$ である.

定理 a.2. $m_1 = m_2$, $1/2 < s < 1$ とする. $\omega \in H^s(\mathbb{R})$, $\theta \in \dot{H}^s \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\|\omega\|_{H^s} < \varepsilon_2$ であり, ε_2 は十分小さい定数とする. そのとき, 十分大きな時刻 $T>0$ が存在して, 方程式系 (2) の解 $(u_1, u_2) \in (C([T,\infty); L^2))^2$ で, 次の漸近挙動を満たすものが存在する:

$$\left.\begin{aligned} &\left\| u_1(t) - e^{\frac{it}{2m_1}\partial_x^2}\mathcal{F}^{-1}D^*(m_1^{-1})\left(\frac{e^{|\widehat{u}_{1+}|^2\log t}}{e^{|\widehat{u}_{1+}|^2\log t}+e^{-|\widehat{u}_{1+}|^2\log t}}\right)^{1/2}\widehat{u}_{1+}\right\|_{L^2} \to 0, \\ &\left\| u_2(t) - e^{\frac{it}{2m_2}\partial_x^2}\mathcal{F}^{-1}D^*(m_2^{-1})e^{i\pi/4}\left(\frac{e^{-|\widehat{u}_{2+}|^2\log t}}{e^{|\widehat{u}_{2+}|^2\log t}+e^{-|\widehat{u}_{2+}|^2\log t}}\right)^{1/2}\widehat{u}_{2+}\right\|_{L^2} \to 0. \end{aligned}\right\} \quad (t\to\infty)$$

ここで, $\widehat{u}_{1+}(\xi) = \omega(\xi)e^{i\theta(\xi)}$, $\widehat{u}_{2+}(\xi) = \omega(\xi)e^{i\theta(\xi)}$ である.

Remark 1. (i) 定理 a.1 および, 定理 a.2 により, 3 次の非線形項の場合にも質量の遷移が起こる解が存在することが分かる. さらに, 定理 a.2 から非線形項の構造により, 時刻正と負で総質量を得る成分が異なる場合があることも分かる.
(ii) 方程式系 (1), (2) についても, 方程式系 (3) の場合に存在が示されている修正漸近自由解を構成することができる (Hayashi-Li-Naumkin [2], Ozawa [4]).

References

[1] Barab, J. E., *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.

[2] Hayashi, N., Li, C., Naumkin, P. I., *Modified wave operator for a system of nonlinear Schrödinger equations in 2d*, Comm. Partial Differential equations **37** (2012), 947–968.

[3] Ogawa, T., Uriya, K., *Final state problem for a quadratic nonlinear Schrödinger system in two space dimensions with mass resonance*, J. Differential equations **258** (2015), 483–503.

[4] Ozawa, T., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[5] Uriya, K., *Final state problem for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction*, to appear in J. Evolution equations.

[6] Wadati, M., Tsuchida, N., *Wave propagations in the $F = 1$ spinor Bose-Einstein condensates*, J. Phys. Soc. Jpn. **75** (2006), 014301.