勾配拘束問題　－再訪－

小池茂昭　（東北大学）

（於）熊本大学応用解析セミナー　2016 年 11 月 12 日

有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ と与えられた外力 $f \in L^2(\Omega)$ に対し, 次のエネルギーを考える.

$$E[v] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Dv|^2 - fv \right) dx \quad (v \in H_0^1(\Omega))$$

よく知られているように, $E[\cdot]$ の $H_0^1(\Omega)$ での最小元 $u \in H_0^1(\Omega)$ が唯一つ存在し, Dirichlet 境界条件 “$u = 0$ on $\partial\Omega$” の下で, Poisson 方程式の弱解になる.

$$-\triangle u = f \quad \text{in } \Omega$$

$H_0^1(\Omega)$ の代わりに, 閉凸集合 $K_o := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \leq g \text{ a.e. in } \Omega\}$ 上で, 最小化を考える問題は変分不等式と呼ばれ, 多くの応用に現れるだけでなく, 自由境界問題として研究されてきた. この解は次の Bellman 型の方程式を（少なくとも形式的に）満たし, obstacle 問題と呼ばれる.

$$\max\{-\triangle u - f, u - g\} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

更に, K_o の代わりに, $K_g := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid |Dv| \leq 1 \text{ a.e. in } \Omega\}$ 上で, エネルギーを最小にする問題は, elastic-plastic torsion 問題と呼ばれ, 解の存在一意性や regukarity が調べられている. その解は, obstacle 問題の類推で

$$\max\{-\triangle u - f, |Du| - 1\} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を満たす事が期待されるが, 残念ながらこれは成り立たない. しかし, 特異確率最適制御問題として, この方程式は導かれ, 勾配拘束問題に現れる Bellman 方程式と呼ばれる. 解の存在や regularity が, 1970 年代終わりから 80 年代初頭にかけて, Evans, Wiegner 等により研究されてきた.

本講演では, 1983 年の石井仁司先生との共同研究をもとに, 勾配拘束問題の近似方程式の収束率に関して最近得た結果を述べる. 本講演は, 東北大学の院生の小杉卓裕, 内藤誠との共同研究である.