特異性をもつ被食-捕食モデルの 解の漸近挙動について

下條　昌彦

岡山理科大学・理学部・応用数学科

1. SINGULAR PREY-PREDATOR MODEL

特異被食・捕食型モデル (singular prey-predator model)

$$\begin{cases} B_t = d_b \Delta B + r_b B(1 - B/K) - \mu C, & x \in \Omega, t > 0, \\ C_t = d_c \Delta C + r_c C(1 - \mu C/B), & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial B/\partial\nu = \partial C/\partial\nu = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ B(\cdot, 0) = B_0 > 0, \quad C(\cdot, 0) = C_0 \geq 0, x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は境界が滑らかな有界領域であり，$d_b, d_c, r_b, r_c, K, \mu$ は正定数，ν は $\partial\Omega$ の外向きベクトルである. この問題は孤島における被食・捕食現象を記述するモデルとして知られている．ただし，B は鳥の密度 C は野生猫の密度である ([1]). 第 1 式は被食者 (鳥) は捕食者 (猫) が不在のときは，内的自然増加率 r_b，環境収容力 K のロジステック増殖を行うこと，および捕食応答が定数 μ であることを意味する．一方，捕食者も内的自然増加率 r_c のロジステック増殖を行うのだがその環境収容力は被食者の密度に比例しており B/μ で与えられていると仮定している. この仮定は捕食者である猫が，被食者の鳥を狩りで仕留めるのは空腹のときだけであり，満腹のときは狩りを行わないことを意味している．また猫が共同で狩りを行わないことや互いに餌の奪い合いをしないことも含んでいる．パラメーター d_b と d_c は各々被食者と捕食者に対する拡散係数である．

この問題 (1.1) は Holling-Tanner の捕食・被食モデルの特殊な場合であり，有限時間での絶滅現象を記述する方程式である．一般に Holling-Tanner モデルの方が古典的なロトカ・ボルテラ型の方程式よりも観測データを忠実に再現し，解の挙動も豊富である．さて (1.1) に対応する常微分方程式系

$$\begin{cases} B_t = r_b(1 - B/K)B - \mu C, & t > 0, \\ C_t = r_c(1 - \mu C/B)C, & t > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

の解の挙動は [4] により完全に分類されている. キーとなるアイデアは新しい変数 $P := C/B$ を導入して，この問題 (1.2) を

$$\begin{cases} B_t = [r_b(1 - B/K) - \mu P]B, & t > 0, \\ P_t = [r_c - r_b + r_b B/K - \mu(r_c - 1)P]P, & t > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

This work is supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (No. 16K17634).

に対する P の爆発問題と考え直す点にある．変換した方程式 (1.3) の P に関する爆発現象がもとの方程式 (1.2) の被食者 B に対する絶滅現象 (quenching) に対応している．

たとえば $r_c > 1$ かつ $r_b > 1$ のとき (1.2) はただ一つの正値平衡点 $(B^*, C^*) := (K(1-1/r_b), K(1-1/r_b)/\mu)$ をもち, 大域的に漸近安定であることが示されている. すなわち猫と鳥は共存する．証明では (1.3) において対応する平衡点 (B^*, P^*), $P^* := 1/\mu$ が大域的に漸近安定であることリャプノフ関数を構成して示す.

一方 $r_c > 1$ で $r_b < 1$ のときは (1.3) の平衡点 $(0, P^{**})$ は大域的に漸近安定である．ただし $P^{**} := (r_c - r_b)/[\mu(r_c - 1)]$ とする. これをもとのシステム (1.2) の言葉で解釈しなおすと任意の初期値に対して解が $t \to \infty$ のとき $(0,0)$ に収束することを意味する. すなわち時間を無限にかけて鳥と猫は同時に絶滅する．

また $r_c < 1$ のときは有限時間内で鳥が狩りつくされる現象が見出される．実際の生態系において種の絶滅は有限時間で起きる．だから種の絶滅は深刻な問題なのである．ところがロトカボルテラ型の古典モデルでは種の絶滅は無限時間をかけてしか起きない． (1.2) は実際の生物の絶滅現象を如実に記述しているといえる．

捕食・被食型の常微分方程式に拡散項を付け加えることは，空間非一様性を考える典型的な処方である．反応拡散系 (1.1) において有限時間での絶滅 (quenching) と時間大域解の存在が，拡散係数が等しい $d_b = d_c$ の場合は [4] により一部調べられている. ここで *quenching* とは，ある有限の時間 $T < \infty$ があって $\liminf_{t \uparrow T^-} \{\min_{\bar\Omega} B(\cdot, t)\} = 0$ であることを意味する. その証明はとても簡単である． $d_b = d_c = d$ のとき (1.1) に対して $P = C/B$ が満たす偏微分方程式は

$$P_t = d\Delta P + 2\frac{d}{B}\nabla B \cdot \nabla P + [r_c - r_b + r_b B/K - \mu(r_c - 1)P]P$$

となる．この方程式に関しては比較原理が使えるので常部分方程式 (1.3) の解と比較するだけで P に対して有限時間で爆発する解や時間大域解が簡単に構成できてしまう．それらがもとの初期境界問題 (1.1) の被食者 B が quenching を起こす解や時間大域解に対応する．ここで P が爆発するとはある $T < \infty$ に対して $\limsup_{t \uparrow T^-} \{\max_{\bar\Omega} P(\cdot, t)\} = \infty$ が成り立つことである. だが拡散係数が異なる場合，すなわち $d_b \neq d_c$ の場合に関しては全くというほど結果がない状態である ([2, 3])．以下ではボルドー大学の Arnaud Ducrot 氏と淡江大学の Jong-Shenq Guo 氏との共同研究で得られた結果を紹介する．

2. SHADOW SYSTEM

一般の連立反応拡散方程式において一方の拡散係数が極めて極めて大きい場合を考えることがある．その極限で得られる方程式はシャドーシステムといわれる ([6])．反応項が滑らかな関数のとき，シャドーシステムのアトラクターはもとの反応拡散方程式の力学系のアトラクターを良く近似する ([5])．講演者はまず (1.1) に対して極限 $d_b \to \infty$ に対するシャドーシステムの解挙動をほぼ完全に分類した．その情報は $d_b > d_c$ の場合に対して，もとの方程式 (1.1) について様々な手がかりを与えてくれる．

さて (1.1) に対するシャドーシステムを導出しよう．被食者の拡散係数 d_b が大きくなると，拡散の影響で空間依存性が無くなるはずである．そこで形式的に $d_b \to \infty$ のとき，ある空間一様な関数 $\xi(t)$ に対して $B(x,t) \to \xi(t)$ とする．これを認めて

$B(x,t) \equiv \xi(t)$ として方程式 (1.1) の第 1 式の両辺を空間で積分すると，関数 (ξ, C) に対する以下のシャドーシステムを得る:

$$
\begin{cases}
\xi_t = r_b(1-\xi/K)\xi - \dfrac{\mu}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega C\,dx, \quad t>0,\\
C_t = d_c\Delta C + r_c(1-\mu C/\xi)C, \quad x\in\Omega,\, t>0,\\
\partial C/\partial\nu = 0, \quad x\in\partial\Omega,\, t>0,\\
\xi(0)=\xi_0 := B_0>0, \quad C(\cdot,0)=C_0\geq 0, \quad x\in\Omega.
\end{cases} \tag{2.1}
$$

簡単な計算により (ξ, P) は

$$
\begin{cases}
\xi_t = \Big\{r_b(1-\xi/K) - \dfrac{\mu}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega P\,dx\Big\}\xi, \quad t>0,\\
P_t = d_c\Delta P + \Big[r_c - r_b + r_b\xi/K - \mu\Big(r_cP - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega P\,dx\Big)\Big]P,\ x\in\Omega,\, t>0,\\
\partial P/\partial\nu = 0, \quad x\in\partial\Omega,\, t>0,\\
\xi(0)=\xi_0=B_0>0, \quad P(\cdot,0)=P_0 := C_0/B_0\geq 0, \quad x\in\Omega
\end{cases} \tag{2.2}
$$

を満たすことがわかる．右辺の非線形項が局所リプシッツ連続なのは簡単にみてとれるので，局所解が存在する．解の最大存在時刻が有限のとき関数 P は爆発し，(2.2) の爆発現象は (2.1) の絶滅現象に対応する．

まず $r_c \geq 1$ のときは存在定理と Moser の反復法を用いることによりシャドーシステム (2.2) の時間大域解に関する以下の定理が示せる.

Theorem 2.1 (時間大域解)**.** $r_c \geq 1$ のとき シャドーシステム (2.2) の任意の解は時間大域的に存在する. さらに $r_c > 1$ ならば初期値 (ξ_0, P_0) が関数空間 $(0,\infty)\times L^\infty(\Omega)$ 内の有界な集合 $\mathcal{B}$ に含まれていれば初期値に依らず $\mathcal{B}$ に依存する定数 $M>0$ があって

$$\|P(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M,\ \forall\, t\geq 0.$$

次に時間大域解の漸近挙動を考えよう．簡単な計算からシャドーシステム (2.2) には $r_b > 1$ のとき正の定常解 (ξ^*, P^*) をただひとつもつことがわかる．ただし $\xi^* := B^*$ とする. パラメーター r_b の範囲によって, 解の挙動は以下のように分類できる.

Theorem 2.2 (漸近挙動)**.** $r_c \geq 1$ のとき シャドーシステム (2.2) の任意の時間大域解の漸近挙動は以下で与えられる*:*

(1) $r_b > 1$ かつ $r_c \geq 1$ の場合． $t\to\infty$ のとき $\xi(t)\to\xi^*$，$P(\cdot,t)\to P^*$ *in* $L^\infty(\Omega)$.
(2) $r_b \leq 1$ かつ $r_c > 1$ の場合. $t\to\infty$ のとき $\xi(t)\to 0$, $P(\cdot,t)\to P^{**}$ *in* $L^\infty(\Omega)$.
(3) $r_b < 1$ かつ $r_c = 1$ の場合． $t\to\infty$ のとき $\xi(t)\to 0$， $\|P(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\to\infty$.

一方 $r_c < 1$ のときは有限時間で ξ の quenching が起きる.

Theorem 2.3 (絶滅)**.** $r_c < 1$ とする．シャドーシステム (2.2) に対して以下が成立.

(1) $r_b \leq r_c$ の場合．任意の初期値に対して (2.2) の解は有限時間で爆発する．
(2) $r_b > r_c$ の場合． (2.2) の解は以下の条件の下で爆発する：

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \ln P_0\,dx > \ln P^{**}.$$

3. ORIGINAL SYSTEM

さてもとの問題 (1.1) に戻り $d_b > d_c$ の範囲を考える．関数 $P = C/B$ に対して (B,P) は次の非線形偏微分方程式を満たす．

$$\begin{aligned} B_t &= d_b\Delta B + r_b(1-B/K)B - \mu PB, && (3.1)\\ P_t &= d_c\Delta P + (d_c-d_b)\frac{P}{B}\Delta B + 2\frac{d_c}{B}\nabla B\cdot\nabla P && (3.2)\\ &\qquad + \Big[r_c - r_b + \frac{r_b}{K}B - \mu(r_c-1)P\Big]P, \end{aligned}$$

なお境界条件と初期条件は

$$\partial B/\partial\nu = \partial P/\partial\nu = 0, \quad x\in\partial\Omega,\, t>0, \tag{3.3}$$

$$B(\cdot,0) = B_0 > 0, \quad P(\cdot,0) = P_0 \geq 0, \quad x\in\Omega. \tag{3.4}$$

で与えられる．我々は時間大域解の存在に関して以下の結果を得た．

Theorem 3.1. $r_c \geq 1$, $d_b \geq d_c$ および $N=1$ を仮定する．(3.1)-(3.4) の任意の解は時間大域的に存在する．さらに $r_c > 1$ であれば P は $L^1(\Omega)$ 有界である．

B^* が正の定常解として出現するのは $r_b > 1$ のときであった．これと拡散係数の大小に関する条件をさらに仮定すれば以下の漸近挙動を得る．

Theorem 3.2. $N=1$, $\Omega=(0,1)$ とする．$r_c \geq 1$, $r_b > 1$, $2\pi^2 d_b + r_b \geq 2$ および $d_b \geq d_c$ を仮定する．このとき (3.1)-(3.4) の解は時間無限まで存在して一様有界である．また $t\to\infty$ のとき $B(\cdot,t)\to B^*$ かつ $P(\cdot,t)\to P^*$ *in* $L^\infty(\Omega)$.

基本的な未解決問題をいくつか述べる．(1.1) に対して $d_b \neq d_c$ のときに quenching する空間非一様な解が未だに構成されていない．[2] によると $d_b = d_c$, $K=\infty$ のときは半空間で Type II quenching が起きる[1]．数値計算によると周期的な振動が見出されているもののその証明はなされていない．動く特異点を持つ爆発解の安定性にも関連するが [3] で構成された自由境界付き特異進行波の安定性も未解決である．

References

[1] F. Courchamp, M. Langlais, G. Sugihara, *Controls of rabbits to protect birds from cat predation*, Biological Conservations, **89** (1999), 219–225.

[2] A. Ducrot, J.-S. Guo, *Quenching behavior for a singular predator-prey model*, Nonlinearity, **25** (2012), 2059-2073.

[3] A. Ducrot, M. Langlais, *A singular reaction-diffusion system modelling prey-predator interactions: Invasion and co-extinction waves*, J. Differential Equations, **253** (2012), 502–532.

[4] S. Gaucel, M. Langlais, *Some remarks on a singular reaction-diffusion arising in predator-prey modelling*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **8** (2007), 61–72.

[5] J.K. Hale, K. Sakamoto, *Shadow systems and attractors in reaction-diffusion equations*, Appl. Anal., **32** (1989), 287–303.

[6] W,M. Ni, K. Suzuki and I Takagi, *The dynamics of a kinetic activator-inhibitor system*, J. Differential Equations, **229** (2006), 426–465.

[1]だが初期値が無限遠で発散しているので，生物学的な意味はないかも知れない．一方で無限遠での爆発の解析手法を使って Type I quenching を構成している．我々は $d_b \gg d_c$ のときの解挙動がシャドーシステムと同じであることを証明した．$d_b \ll d_c$ $r_c = 1$ では拡散誘導爆発が起きると予想している．