半線形放物型方程式の定常解の安定性

梶木屋 龍治　(佐賀大学理工学部)

次の半線形放物型方程式の定常解の安定性を考える.

$$
\begin{aligned}
u_t - \Delta u = f(x,u) &\quad \text{in } \ \Omega \times (0,\infty),\\
u = 0 &\quad \text{on } \ \partial\Omega \times (0,\infty),\\
u(x,0) = u_0(x) &\quad \text{in } \ \Omega,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域で, 境界は滑らかとする. $f(x,u) = |u|^{p-1}u$ $(0<p<1)$ の場合には, 赤木氏との共同研究がある. 本講演は, その非線形項を一般化した場合の安定性の結果である. 次の仮定をおく.

仮定 1. $f(x,u)$ は, $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ でヘルダー連続, u について奇関数, ある $C>0$, $p>1$ が存在して, 次を満たす.

$$|f(x,u)| \le C(|u|^p + 1) \quad (u \in \mathbb{R},\ x \in \overline{\Omega}),$$

ここで, $N=1,2$ のとき, $1<p<\infty$, $N \ge 3$ のとき, $1<p<N/(N-2)$ とする. $u \ne 0$ に対して, 偏導関数 $f_{uu}(x,u)$ が存在して, $\overline{\Omega}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ で連続である. λ_1 をディリクレ・ラプラシアンの第1固有値とするとき, 次を仮定する.

$$f_u(x,u) < f(x,u)/u \quad (u>0), \quad \limsup_{|u|\to\infty}(\max_{x\in\overline{\Omega}} f(x,u)/u) < \lambda_1,$$

$$\lim_{u\to 0}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} f_u(x,u)\right) = \infty.$$

ある $L, u_0 > 0$, $\theta_0 \in (0,1)$ が存在して,

$$|f_{uu}(x,v)| \le L|f_u(x,u)|/u + L/u, \quad (0<u<u_0,\ v\in[(1-\theta_0)u,(1+\theta_0)u]).$$

上の仮定を満たす $f(x,u)$ には, 次のような例がある.

$$a(x)|u|^{p-1}u, \quad -a(x)u\log|u|, \quad a(x)|u|^{p-1}ue^{-|u|}, \quad a(x)\tanh(|u|^{p-1}u).$$

ここで, $a(x)>0$ は連続関数, $0<p<1$ とする. 次の汎関数 $E(u)$ は (1) のリアプノフ汎関数になる.

$$E(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right)dx, \quad F(x,u) := \int_0^u f(x,s)ds.$$

定常問題は次の通りである.

$$-\Delta v = f(x,v) \quad (x\in\Omega), \qquad v = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{2}$$

命題 1 (既知の結果)**.** (i) (2) の正値解 ϕ が一意に存在する. それは $E(u)$ の $H_0^1(\Omega)$ における最小点であり, $E(u)$ の最小点は, $\pm\phi$ のみである.

(ii) $C^2(\overline{\Omega})$ ノルムが零に収束するような (2) の非自明解の列 v_n が存在する.

定常解の安定性は通常のようにリアプノフの意味での安定性により定義する. $\|u\|_p$ は, u の $L^p(\Omega)$ ノルムを表す. 主結果は次の通りである.

定理 1. 任意の $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して, (1) の解は存在し, $H_0^1(\Omega)$ において, 有界な大域解となる. またその軌道は相対コンパクトになる. ω 極限集合は, 空集合でなく, 定常解の部分集合になる.

定理 2. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\|v\|_\infty < \varepsilon_0$ をみたす (2) の解 v は漸近安定でない. さらに, もし v が定常解の集合の孤立点ならば, それは不安定である. 零解は不安定である.

定理 3. 正値定常解 ϕ は, 指数漸近安定であり, その指数は, 線形化作用素 $-\Delta - f_u(x,\phi)$ の第 1 固有値 $\mu > 0$ である. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある定数 $\delta > 0$ があり, $\|u(0) - \phi\|_{H_0^1} < \delta$ をみたす (1) の解 $u(t)$ に対して,

$$\|u(t) - \phi\|_{H_0^1} \le \varepsilon e^{-\mu t} \quad (t \ge 0).$$

上の評価式の μ は最良の指数である. 実際に次の定理が成り立つ.

定理 4. $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ は, ある $\delta_0 \in (0,1)$ に対して, 次のいずれかを満たすものとする.

$$u_0(x) \ge (1+\delta_0)\phi(x), \quad \text{または} \quad 0 < u_0(x) \le (1-\delta_0)\phi(x).$$

このとき, ある $c > 0$ が存在して, u_0 を初期値に持つ (1) の解 $u(t)$ は次を満たす.

$$\|u(t) - \phi\|_{H_0^1} \ge \|u(t) - \phi\|_2 \ge ce^{-\mu t} \quad (t \ge 0).$$

$N = 1$, $\Omega = (0,1)$, $f(x,u) \equiv f(u)$ とする. 自然数 $k \ge 1$ に対して, (2) の解 $v(x)$ が区間 $(0,1)$ 内に, ちょうど $k-1$ 個の零点を持つとき, $(k-1)$-nodal solution と呼ぶ.

定理 5. $N = 1$, $\Omega = (0,1)$, $f(x,u) \equiv f(u)$ とする. このとき, 各 $k \ge 1$ に対して, $v'(0) > 0$ をみたす (2) の $(k-1)$-nodal solution $v_k(x)$ がただ一つ存在する. (2) のすべての解は, $\pm v_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ と零解で尽くされる. 正値定常解 $v_1(x)$ と負値定常解 $-v_1(x)$ は指数漸近安定であり, それ以外のすべての定常解は不安定である.