Large time behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around periodic steady states

榎本　翔太　(九州大学大学院数理学府 D3) *1

1　序

周期的層状領域 Ω における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \\ \rho(\partial_t v + (v\cdot\nabla)v) - \nu\Delta v - (\nu+\nu')\nabla\mathrm{div} v + \nabla P(\rho) = \rho f, \\ v|_{x_n=\omega_j(x')} = 0 \qquad (t>0, x'\in\mathbb{R}^{n-1}, j=1,2), \\ (\rho, v)|_{t=0} = (\rho_0, v_0) \end{cases} \tag{1}$$

を考える．空間次元は $n=2,3$ である．ここで, $\rho=\rho(x,t)$, $v={}^\top(v^1(x,t),\cdots,v^n(x,t))$, $(t\geq 0, x\in\Omega)$ はそれぞれ密度と速度場を表す無次元化された未知関数であり, Ω は

$$\Omega = \{x=(x',x_n); x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}, \omega_1(x')<x_n<\omega_2(x')\}$$

で与えられる周期的層状領域である. ただし, ω_1, ω_2 は定数ではない滑らかな関数で x' の Q-周期関数 ($Q=\Pi_{j=1}^{n-1}[-\frac{\pi}{\alpha_j},\frac{\pi}{\alpha_j})$, α_1, $\cdots$, α_{n-1} は正定数), つまり,

$$\omega_j(x'+\frac{2\pi}{\alpha_i}\mathbf{e}_i) = \omega_j(x'), \quad \mathbf{e}_i = {}^\top(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0),\ (i=1,\cdots,n-1, j=1,2)$$

を満たす．$f=f(x)$ は外力を表す与えられた関数で x' について Q-周期的である．ν, ν' は

$$\nu>0, \quad \frac{2}{n}\nu+\nu'\geq 0$$

を満たす定数で, さらに $\frac{\nu+\nu'}{\nu}$ は

$$\frac{\nu+\nu'}{\nu}\leq \nu_*$$

を満たすと仮定する．ここで $\nu_*>0$ は定数である．$P=P(\rho)$ は圧力を表し, ρ の滑らかな関数で,

$$\gamma \equiv \sqrt{P'(1)} > 0$$

を満たすと仮定する.

Ω の基本周期領域を

$$\Omega_{per} = \{x=(x',x_n); x'\in Q,\ \omega_1(x')<x_n<\omega_2(x')\}$$

*1 E-mail:s-enomoto@math.kyushu-u.ac.jp

とおく.

層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定常解の安定性については境界が平ら (ω_j : 定数, $j=1,2$) な場合, [3, 4] において平行流型定常解と呼ばれる特殊な定常解に対して安定性解析が行われている. 外力が $g = {}^\top(g^1(x_n), 0, \cdots, 0, g^n(x_n))$ で与えられたとき, (1) は $(\rho, v) = (\rho_s(x_n), v_s^1(x_n), 0, \cdots, 0)$ という形の定常解を持つ. このような x' 方向への一様性を持つ解を平行流型定常解と呼ぶ. [3, 4] ではこの平行流型定常解の安定性が考察され, レイノルズ数とマッハ数が十分小さい時, 十分小さい初期撹乱に対して平行流型定常解は漸近安定であり, 平行流型定常解からの摂動は L^2 ノルムで $O(t^{-\frac{n-1}{4}})$ で減衰することが示されており, さらに漸近挙動として空間次元が $n \geq 3$ の時, 摂動は $n-1$ 次元の線形熱方程式の解のように振る舞い, 空間次元が $n=2$ の時, 摂動は 1 次元粘性 Burgers 方程式の解のように振る舞うことが示された. [3, 4] の証明では x' 方向に関する Fourier 変換を用いた時間周期解周りの線形化作用素のスペクトル解析が行われている. [3, 4] の解析は平行流型定常解の x' 方向への一様性という性質に本質的に依存している. 本講演で扱う空間周期解は平行流型定常解のような x' 方向に関する一様性を持たないため, [3, 4] とは異なった解析手法が必要となる.

また, 本講演で扱う周期的層状領域では [5] において (1) の静止定常解の線形化安定性について解析が行われ, 静止定常解は線形安定であり, 静止定常解周りの線形化問題の解は L^2 ノルムで $O(t^{-\frac{n-1}{4}})$ で減衰し, 漸近的主要部が n-1 次元の線形熱方程式の解として与えられることが示された. [5] では領域の空間周期性に着目し, Fourier 変換の代わりに Bloch 変換を用いることによって, 非有界領域である層状領域 Ω 上の問題を有界領域である基本周期領域 Ω_{per} 上の問題に帰着させ, 静止定常解周りの線形化作用素のスペクトル解析を行っている. 本講演でも空間周期性に着目した Bloch 変換を利用した線形化作用素のスペクトル解析を行っていくが, 今回考察する空間周期定常解のような空間非一様な流れを持つ解の安定性解析については, 方程式の持つ双曲型的側面が強く現れる為, [5] とは異なる解析手法の導入が必要となる.

2　主結果

本講演では (1) の空間周期定常解の安定性について考察する.

(1) の空間周期定常解は以下のように与えられる.

Proposition. 1 ある定数 $\nu_0 > 0$, $\tilde{\gamma}_0 > 0$ が存在し, $\nu \geq \nu_0$, $\frac{\gamma^2}{\nu+\tilde{\nu}} \geq \tilde{\gamma}_0$ ならば, (1) の Q-周期定常解 $u_s(x) = {}^\top(\rho_s(x), v_s(x))$ が存在し,

$$\|\rho_s - 1\|_{H^4(\Omega_{per})} + \|v_s\|_{H^5(\Omega_{per})} \leq C\|f\|_{H^2(\Omega_{per})}.$$

を満たす.

定常解 u_s に対する撹乱を $u(t)=(\phi(t),w(t))=(\gamma^2(\rho(t)-\rho_s),v(t)-v_s)$ と表すと (1) は次のように書き換えられる.

$$\begin{cases}\partial_t\phi+\mathrm{div}(\phi v_s)+\gamma^2\mathrm{div}(\rho_s w)=f^0,\\ \partial_t w-\frac{\nu}{\rho_s}\Delta w-\frac{\tilde{\nu}}{\rho_s}\nabla\mathrm{div}w+\nabla\Big(\frac{P'(\rho_s)}{\gamma^2\rho_s}\phi\Big)\\ \qquad+\frac{1}{\gamma^2\rho_s^2}(\nu\Delta v_s+\tilde{\nu}\nabla\mathrm{div}v_s)\phi+v_s\cdot\nabla w+w\cdot\nabla v_s=\tilde{f},\\ w|_{\partial\Omega}=0,\quad u|_{t=0}=u_0={}^\top(\phi_0,w_0).\end{cases}\tag{2}$$

ここで, $\tilde{\nu}=\nu+\nu'$, f^0, $\tilde{f}$ は非線形項である.

(2) の解の時間無限大における漸近挙動について次のことが分かる.

Theorem. 1 ある定数 $\nu_0>0$, $\tilde{\gamma}_0>0$ が存在し, $\nu\geq\nu_0$, $\frac{\gamma^2}{\nu+\tilde{\nu}}\geq\tilde{\gamma}_0$ ならば $\|u_0\|_{H^2\cap L^1}\ll 1$ と $w_0\in H_0^1$ を満たす初期摂動 $u_0=(\phi_0,w_0)\in H^2\cap L^1$ に対して, (2) の時間大域解 $u(t)=(\phi(t),w(t))\in C([0,\infty);H^2)$ が一意に存在し, $l=0,1$ に対して, $u(t)$ は

$$\|\partial_{x'}^l u(t)\|_{L^2}=O(t^{-\frac{n-1}{4}-\frac{l}{2}})\qquad(t\to\infty)$$

を満たし, さらに以下が成り立つ.

(i) $n=3$ のとき,

$$\|u(t)-\sigma(t)u^{(0)}\|_{L^2}=O(t^{-\frac{n-1}{4}-\frac{1}{2}}\log(1+t))\qquad(t\to\infty).$$

ここで $u^{(0)}=(\phi^{(0)}(x),w^{(0)}(x))$ は x' に関する Q-周期関数で, $\sigma=\sigma(x',t)$ は

$$\begin{cases}\partial_t\sigma-\sum_{j,k=1}^2 a_0^{jk}\partial_{x_j}\partial_{x_k}\sigma+\sum_{j=1}^2 a_1^j\partial_{x_j}\sigma=0,\\ \sigma|_{t=0}=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\phi_0(x',x_3)dx_3\end{cases}$$

の解である. ここで, a_1^j, $a_0^{jk}\in\mathbb{R}$ はある定数で行列 $(a_0^{jk})_{j,k=1}^2$ は正定値である.

(ii) $n=2$ のとき,

$$\|u(t)-\sigma(t)u^{(0)}\|_{L^2}=O(t^{-\frac{3}{4}+\varepsilon})\qquad\varepsilon>0,\qquad(t\to\infty).$$

ここで $u^{(0)}=(\phi^{(0)}(x),w^{(0)}(x))$ は x_1 に関する Q-周期関数で, $\sigma=\sigma(x_1,t)$ は

$$\begin{cases}\partial_t\sigma-a_0\partial_{x_1}^2\sigma+a_1\partial_{x_1}\sigma+a_2\partial_{x_1}(\sigma^2)=0,\\ \sigma|_{t=0}=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\phi_0(x_1,x_2)dx_2\end{cases}$$

の解である. ここで $a_0>0$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ はある定数である.

参考文献

[1] Enomoto, S., Large time behavior of the solutions around spatially periodic solution to the compressible Navier-Stokes equation, to appear in Nonlinear Analysis.

[2] Enomoto, S. and Kagei, Y., Asymptotic behavior of the linearized semigroup at space-periodic stationary solution of the compressible Navier-Stokes equation, to appear in J. Math. Fluid Mech.

[3] Kagei, Y., Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow, Arch. Rational Mech. Anal., **205** (2012), pp. 585-650.

[4] Kagei Y., Nagafuchi Y.and Sudou T., Decay estimates on solutions of the linearized compressible Navier-Stokes equation around a Poiseuille type flow, Journal of Math-for-Industory, **2** (2010A), pp. 39-56. Correction to "Decay estimates on solutions of the linearized compressible Navier-Stokes equation around a Poiseuille type flow" in J. Math-for-Ind., **2** (2010A), pp. 39–56, J. Math-for-Ind., **2** (2010B), pp. 235.

[5] Kagei, Y. and Makio, N., Spectral properties of the linearized semigroup of the compressible Navier-Stokes equation on a periodic layer, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **51** (2015), pp. 337–372.

[6] Valli, A., On the existence of stationary solutions to compressible Navier-Stokes equations, Ann. Inst. H Poincarè, **4** (1987), pp. 99-113.