

Blow-up for self-interacting fractional Ginzburg-Landau equation and related commutator estimates

藤原 和将 (早稲田大学)*¹

Vladimir Georgiev (Pisa 大学, 早稲田大学)

小澤 徹 (早稲田大学)

本講演では、次の分数階 Ginzburg-Landau 方程式の解の有限時刻爆発に就いて考察する。

$$\begin{cases} i\partial_t u - (-\Delta)^{1/2} u = -i|u|^{p-1}u, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

但し、 n は正の整数とし、 p は 1 より大きい実数とする。又、 $(-\Delta)^{1/2}$ は $|\xi|$ を表象とする Fourier 掛け算作用素とする。(1) は蔵本モデルと呼ばれる同期現象のモデルに由来している ([TZ]).

講演者らの知る限り、(1) に関する研究は少ないが、(1) は少なくとも適切な Sobolev 空間の枠組みに於いては時間局所に適切となる事が知られている。また先験的に次の評価が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \| |u(t)|^{\frac{p-1}{2}} \nabla u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{p-1}{4} \| |u(t)|^{\frac{p-3}{2}} \nabla |u(t)|^2 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

従って解の L^2 と H^1 ノルムは時間に関して単調増大する。然しこの先験的評価のみでは、解の大域的な挙動を捉える事は不可能であり、本講演では時間正方向に対する解の挙動に就いて考察する。

(1) の解の挙動に関して、本研究では次を得た。

命題.1 h を実数値 C^3 級関数で、3 階までの全ての導関数が有界であり、 $\frac{1}{h} \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$ とする。 $u_0 \in hL^2(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n); f/h \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ が

$$\left\| \frac{1}{h} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \left\| \frac{1}{h} [D, h] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p-1}} \left\| \frac{1}{h} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3)$$

を満たしているとする。この時、(1) の解 $u \in C([0, T]; hL^2(\mathbb{R}^n))$ は

$$\left\| \frac{1}{h} u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq e^{-2\| \frac{1}{h} [D, h] \| t} \left(\left\| \frac{1}{h} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{-p+1} + \left\| \frac{1}{h} [D, h] \right\|^{-1} \left\| \frac{1}{h} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{-p+1} \{ e^{-\| \frac{1}{h} [D, h] \| (p-1)t} - 1 \} \right)^{-\frac{1}{p-1}}$$

を満たす。従って、解の最大存在時刻 T は

$$T \leq -\frac{2}{p-1} \left\| \frac{1}{h} [D, h] \right\|^{-1} \log \left(1 - \left\| \frac{1}{h} [D, h] \right\| \left\| \frac{1}{h} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \left\| \frac{1}{h} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{-p+1} \right)$$

で評価される。ここで、 $[(-\Delta)^{1/2}, h]$ は分数階微分と h の掛け算作用素との交換関係である。又、 $\| \frac{1}{h} [D, h] \|$ は、 $\frac{1}{h} [D, h]$ を $L^2(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(\mathbb{R}^n)$ への有界線形作用素と見做した場合の作用素ノルムとする。

命題.1 に因れば、初期値が (3) の意味で大きければ、解が有限時刻で爆発する事が分かるが、藤田劣臨界に於いては初期値の大きさに関わらず解が有限時刻で爆発する。

系 $1 < p < p_F = 1 + \frac{2}{n}$ の場合、任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ に対して、解は有限時刻で爆発する。

*¹ E-mail: k-fujiwara@asagi.waseda.jp

命題.1 は、解の重み付き自乗平均が

$$f' + C_1 f = C_2 f^{\frac{p+1}{2}} \quad (4)$$

といった形の常微分方程式の優解になっている事を示す事で、比較原理から得る事が出来る。ここで、(4) の解は、

$$f(t) = e^{-C_1 t} \left(f(0)^{-\frac{p-1}{2}} + C_1^{-\frac{p-1}{2}} C_2 e^{-C_1 \frac{p-1}{2} t} - C_1^{-1} C_2 \right)^{-\frac{2}{p-1}}.$$

与えられる。命題.1 を示す為に、 $v(t) = u(t)/h$ が、

$$i\partial_t v + \frac{1}{h}(-\Delta)^{1/2}(hv) = ih^{p-1}|v|^{p-1}v$$

を満たす事に注意し、 v のチャージを計算する。(2) と同様の計算により、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)^{p-1} |v(t, x)|^{p+1} dx - \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{v(t, x)} \frac{1}{h(x)} (-\Delta)^{1/2}(hv(t))(x) dx \\ &\geq \left\| \frac{1}{h} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{-p+1} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{p+1} - \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{v(t, x)} \frac{1}{h(x)} [(-\Delta)^{1/2}, h]v(t)(x) dx \end{aligned}$$

を得る。 $\frac{1}{h}[(-\Delta)^{1/2}, h]$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の有界作用素であった場合、 v の自乗平均が (4) の優解となり、有限時刻で爆発する事が分かる。

交換関係 $[(-\Delta)^{1/2}, h]$ の有界性は命題.1 を示す際に肝要であるが、 $(-\Delta)^{1/2}$ の表象は原点に於いて特異性を有する為、Coifman-Meyer の微分作用素に対する重み関数との交換関係の有界性の議論を当てはめる事は出来ない。一方最近、Luigi Forcella(Scuola Normale Superiore), Georgiev 教授, そして小澤教授との議論によって、 h が C^3 級でそれぞれの導関数がある有界であれば、対応する交換関係の評価を Balakrishnan の表現 ([M])

$$(-\Delta)^{1/2} = \int_0^\infty \lambda^{-1/2} (-\Delta)(\lambda - \Delta)^{-1} d\lambda$$

に基づいて証明できる事が分かった。具体的には次を得た。

命題.2 $h \in C^3(\mathbb{R}^n)$ が、 $\max_{|\alpha| \leq 3} \|\partial^\alpha h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$ を満たすとす。この時、

$$\| [(-\Delta)^{1/2}, h] \| \leq C \max_{|\alpha| \leq 3} \|\partial^\alpha h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

命題.2 を考察するに当たり、 h の微分可能性の条件は、 $[\nabla, h] = \nabla h$ という古典的な交換関係に比べて過剰である。 h が適当に遠方で減衰する場合、 h の微分可能性を余分に要求する事なく、交換関係の評価する事は可能である ([FVO])。一方 h の微分可能性を 3 階まで仮定した場合、交換関係の評価は比較的簡潔に導出出来る為、本講演でもこの導出に就いて解説する。具体的には、高周波 ($\lambda \geq 1$) に於ける resolvent の減衰評価に就いて扱う。

参考文献

- [FVO] K. Fujiwara, V. Georgiev, and T. Ozawa, Blow-up for self-interacting fractional Ginzburg-Landau equation, preprint, arXiv:1703.01487.
- [M] M. Kwaśnicki, Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**(2017), 7–51.
- [TZ] V. Tarasov and G. Zaslavsky, Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction, *Chaos*, **16**(2016), 023110.