

# THE WOLFF POTENTIAL ESTIMATE FOR SOLUTIONS TO ELLIPTIC EQUATIONS WITH SIGNED DATA

原 宇信

## 1. 序

$1 < p < \infty$  とする.  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  内の有界領域とする. 1994 年, Kilpeläinen & Malý [4] は方程式  $-\Delta_p u = \mu \geq 0$ ,  $u \geq 0$  in  $B(x_0, 2R)$  をみたす非負  $p$ -優調和関数  $u$  に対し, 両側からの不等式

$$(1) \quad \frac{1}{C} \mathbf{W}_p^\mu(x_0, R) \leq u(x_0) \leq C \left( \inf_{B(x_0, R)} u + \mathbf{W}_p^\mu(x_0, 2R) \right)$$

が成り立つことを示した. ただし  $\mathbf{W}_p^\mu(x_0, R)$  は次で定義される  $\mu$  の Wolff ポテンシャルである:

$$\mathbf{W}_p^\mu(x_0, R) = \int_0^R \left( \frac{\mu(B(x_0, r))}{r^{n-p}} \right)^{1/(p-1)} \frac{dr}{r}.$$

$\mathbf{W}_2^\mu(x, \infty)$  は Newton ポテンシャルになることに注意する. この両側からの不等式を平衡ポテンシャルおよび平衡分布に適用することにより,  $p$ -Laplace 方程式に対する Wiener の判定法が得られる. 現在では (1) に対応する両側評価は距離測度空間上の Cheeger  $p$ -優調和関数や変動指数  $p(x)$ -優調和関数などに対しても得られている. 2002 年に Trudinger & Wang [6] は (1) に Harnack の不等式と Poisson 変形に基づく新証明を与えた. Korte & Kuusi [5] は Trudinger & Wang の証明法を改良し, また上からの評価について新証明を与えた.

近年では解の勾配評価への Wolff ポテンシャルの利用が盛んである. 2010 年に Duzaar & Mingione [1] は勾配評価の手法を開発し, その手法を用いると,  $p \geq 2$  の場合は, 符号付き Radon 測度を外力にもつ方程式に対しても (1) の上からの評価の類似が得られることを指摘した.

## 2. 主結果

$\mu$  を全変動が  $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$  に属する符号付き Radon 測度とする.  $\mu_+$ ,  $\mu_-$  を  $\mu$  の Jordan 分解とする. 関数  $u$  に対し  $u_+ = \max\{u, 0\}$ ,  $u_- = (-u)_+$  とおく. 球  $B = B(x_0, R)$  に対して  $\lambda B = B(x_0, \lambda R)$  ( $\lambda > 0$ ) とおく.  $\int_A u \, dx = |A|^{-1} \int_A u \, dx$  とおく.

次の各点評価を得た [2].

**Theorem 2.1.**  $u$  を  $-\Delta_p u = \mu$  in  $B = B(x_0, R) \subset \Omega$  の弱解とする.  $x_0$  を  $u_+^{p-1}$  の Lebesgue 点とする.  $\gamma > 0$  とする. このとき

$$u_+(x_0) \leq C_3 \left\{ \left( \int_{B \setminus \frac{1}{2}B} u_+^\gamma \, dx \right)^{1/\gamma} + \mathbf{W}_p^{\mu_+}(x_0, 2R) \right\}.$$

ただし  $C_3 = C_3(n, p, \gamma)$ .

$-\Delta_p u = \mu \geq 0$ ,  $u \geq 0$  in  $B(x_0, 2R)$  の場合, この評価と弱 Harnack 不等式を組み合わせることで (1) の上からの評価が得られる.  $u_-$  に対しても同様の不等式が成立

する. 2つの評価を組み合わせることで不等式

$$|u|(x_0) \leq C_3 \left\{ \left( \int_{B \setminus \frac{1}{2}B} |u|^\gamma dx \right)^{1/\gamma} + \mathbf{W}_p^{|\mu|}(x_0, 2R) \right\}$$

が得られる. この  $|u|$  の評価は  $p \geq 2$  の場合は Duzaar & Mingione によって別の証明法で得られていたが  $1 < p < 2$  の場合は新しい. 特に,  $p = 2$  がこの評価の成立のしきい値ではないことがわかった.

### 3. 記号の設定, 鍵になる補題

以下, 簡単のため  $1 < p < n$  の場合を取り扱う.  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $W_0^{1,p}(\Omega)$  and  $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$  で通常通り Sobolev 空間を表す.

$$\chi = \frac{n}{n-p}$$

とおくとき次の Sobolev の不等式が成り立つ.

**Lemma 3.1.** 定数  $C = C(n, p)$  が存在して, 不等式

$$(2) \quad \left( \int_B |u|^{\chi p} dx \right)^{1/(\chi p)} \leq CR \left( \int_B |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

が任意の球  $B = B(x, R)$  と任意の  $u \in W_0^{1,p}(B)$  に対して成り立つ.

$p$ -Laplace 方程式の弱解の正則性の理論から次の不等式が知られている.

**Lemma 3.2** (Theorem 3.34 in [3]).  $u$  を  $-\Delta_p u = 0$  in  $B = B(x, R)$  の弱劣解とする.  $\gamma > 0$  とする. このとき定数  $C = C(n, p, \gamma)$  が存在して不等式

$$\text{ess sup}_{\frac{1}{2}B} u_+ \leq C \left( \int_B u_+^\gamma dx \right)^{1/\gamma}$$

が成り立つ.

指数  $0 < q < \infty$  に対し弱  $L^q$  (準) ノルムを

$$\|f\|_{L^{q,\infty}(\Omega)} = \sup_{t>0} t |\{x \in \Omega : |f(x)| \geq t\}|^{1/q}$$

と定める.

### 4. 主定理の証明の方針

以下

$$\sigma = \chi(p-1)$$

とおく. テスト関数

$$T_k(u) = \min\{\max\{u, -k\}, k\}$$

( $k > 0$ ) と Sobolev の不等式の利用により, 領域の境界上で消える  $p$ -優調和関数に対しては  $L^1 - L^{\sigma,\infty}$  評価が得られることが知られている.

この方法と Trudinger & Wang の Poisson 変形の議論及び Lemma 3.2 を組み合わせ, 次の局所  $L^1 - L^{\sigma,\infty}$  評価を組み立てる.

**Lemma 4.1.**  $u$  を  $-\Delta_p u = \mu$  in  $B = B(x_0, R) \subset \Omega$  の弱解とする.  $\gamma > 0$  とする. このとき

$$\frac{1}{|\frac{1}{2}B|^{1/\sigma}} \|u_+\|_{L^{\sigma,\infty}(\frac{1}{2}B)} \leq C_1 \left( \int_{B \setminus \frac{1}{2}B} u_+^\gamma dx \right)^{1/\gamma} + C_2 \left( \frac{\mu_+(\overline{B})}{R^{n-p}} \right)^{1/(p-1)}.$$

ただし  $C_1 = C_1(n, p, \gamma)$ ,  $C_2 = C_2(n, p)$ .

Kilpeläinen & Malý の証明と同様に, この不等式を縮小していく球の族の上で繰り返し用いることにより主定理の各点評価が得られる.

## REFERENCES

- [1] F. Duzaar and G. Mingione. Gradient estimates via non-linear potentials. *Amer. J. Math.*, 133(4):1093–1149, 2011.
  - [2] T. Hara. The Wolff potential estimate for solutions to elliptic equations with signed data. *Manuscripta Math.*, 150(1-2):45–58, 2016.
  - [3] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Unabridged republication of the 1993 original.
  - [4] T. Kilpeläinen and J. Malý. The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math.*, 172(1):137–161, 1994.
  - [5] R. Korte and T. Kuusi. A note on the Wolff potential estimate for solutions to elliptic equations involving measures. *Adv. Calc. Var.*, 3(1):99–113, 2010.
  - [6] N. S. Trudinger and X.-J. Wang. On the weak continuity of elliptic operators and applications to potential theory. *Amer. J. Math.*, 124(2):369–410, 2002.
- E-mail address:* `takanobu.hara.math@gmail.com`