Sharpness of the Brascamp-Lieb inequality in Lorentz spaces

首都大学東京　澤野嘉宏

Abstract

本報告文では，輸送方程式と関連した積分作用素のストリッカーツ評価を示す．本研究は埼玉大学 Neal Bez 氏，首都大学東京の中村昌平氏，ソウル国立大学の Sanghyuk Lee 氏との共同研究である．

1 Sharpness of the Brascamp-Lieb inequality in Lorentz spaces

Brascamp-Lieb の不等式

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{m} f_j \circ L_j(x)\, dx \le C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}$$

は解析学において基本的な不等式である．ここで，L_j は線形作用素である．このような不等式が $C < \infty$ に対して成り立つためには必然的に L_j に条件が課される．例えば，

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{d_j}{p_j} = m$$

はスケーリングから出てくる．また，$V \subset \mathbb{R}^m$ を任意の線形空間とするとき

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\dim(L_j(V))}{p_j} \le \dim(V)$$

も必要である．この不等式は Young の不等式を含むが Hausdorff-Young-Sobolev の不等式は含まない．そこで，ローレンツ空間

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{m} f_j \circ L_j(x)\, dx \le C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j}, r_j)}$$

の形の変形を考えた．その結果次の定理を得た．

Theorem 1.1. 上記の条件に加えて $\dim(V) \in (0, d)$ のときに

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\dim(L_j(V))}{p_j} < \dim(V)$$

となるならば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{m} f_j \circ L_j(x)\, dx \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j}, r_j)}$$

となる必要十分条件は

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} \geq 1$$

である．また，

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\dim(L_j(V))}{p_j} < \dim(V)$$

が不成立の場合でも

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} \geq 1$$

は少なくとも必要ではある．

例えば，

$$1 < p < q < \infty, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$$

のとき，

$$\||x|^{\alpha-n} * f\|_q \leq C\|f\|_p$$

であるが，$1 < r < \infty$ のとき

$$\||x|^{\alpha-n} * f\|_{q,r} \leq C\|f\|_{p,r}$$

と改良される．

2 応用

$v \in \mathbb{R}^d$ をパラメータとする．次の積分作用素は

$$\rho f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - tv, v)\, dv$$

輸送方程式 $u_t + v \cdot \mathrm{grad} u = 0$ と関係している．ρ のことを速度平均という．随伴作用素は

$$\rho^* g(x,v) = \int_{\mathbb{R}} g(x + tv, t)\, dt$$

で与えられる．実際に，変数変換により次が示せるからである．

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \rho f(x,t)\cdot g(x,t)\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} f(x-tv,v)g(x,t)\,dx\,dv\,dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x,v)\rho^*(x,v)\,dx\,dv.$$

速度平均の随伴に関する次の不等式を示そう．

Theorem 2.1. $\sigma > 1$ として，$q(\sigma)$ を次の方程式

$$\frac{1}{q(\sigma)} + \frac{d}{(d+1)\sigma} = 1$$

と定める．このとき，

$$\|\rho^* g\|_{L^{(d+1)\sigma}_{x,v}} \lesssim \|g\|_{L_t^{q(\sigma),(d+1)\sigma} L_x^{\frac{d+1}{2}\sigma}}$$

が成り立つ．

3　補題

Lemma 3.1. $1 \leq p \leq 2$ のときに次の不等式が成り立つ．

$$\|f(x-tv,v)\|_{L_x^{p'}L_v^p} \leq |t|^{-\frac{2d}{p}+d}\|f\|_{L_x^p L_v^{p'}}.$$

Proof. $p=2$ のときは自明．$p=1$ のときは以下に示すように，簡単である．残りのケースは補間をすればよい．

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|f(x-tv,v)|)\ dv \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}} \|f(x-tv,\cdot)\|_{L_v^\infty}\,dt\,dv = |t|^{-d}\|f(x-tv,\cdot)\|_{L_x^1 L_v^\infty}$$

∎

4　定理の証明のための注意

ρ^* に関する命題を示すわけであるが，$g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_{x,t})$ の場合は

$$\rho_R^* g(x,v) = \int_{-R}^{R} g(x+tv,v)\,dt$$

だから，

$$\|\rho_R^* g\|_{L^{(d+1)\sigma}_{x,v}} \leq \int_{-R}^{R} \|g(x+tv,v)\|_{L^{(d+1)\sigma}_{x,v}}\,dt = 2R\|g\|_{L^{(d+1)\sigma}_{x,v}} < \infty$$

である．したがって，$S, S' > 0$ に対して，

$$M_{\chi_{B(S)}}F = \chi_{B(S)}F, \quad T_{S'}F = \frac{\chi_{B(S')}}{|B(S')|} * f$$

とおき，ρ^* を直接考えずに，

$$\rho_R^* \circ M_{\chi_{B(S)}} \circ T_{S'}$$

を考えると最低限 $\rho_R^* \circ M_{\chi_{B(S)}} \circ T_{S'}$ は有界であるとわかる．したがって，実際には

$$\|\rho_R^* \circ M_{\chi_{B(S)}} \circ T_{S'} g\|_{L_{x,v}^{(d+1)\sigma}} \lesssim \|g\|_{L_t^{q(\sigma),(d+1)\sigma} L_x^{\frac{d+1}{2}\sigma}}$$

なる評価を示すことになるが，極限操作はルーチンワークなのでここでは $\mathcal{U}$ は有界と仮定して，結論を得ることにする．

5　定理の証明

双対性により，

$$\|\rho g\|_{L_t^{(q(\sigma))',((d+1)\sigma)'} L_x^{\left(\frac{d+1}{2}\sigma\right)'}} \lesssim \|g\|_{L_{x,v}^{((d+1)\sigma)'}} \tag{1}$$

を示すことにする．

$$\frac{1}{q(\sigma)'} = \frac{d}{(d+1)\sigma}$$

より (1) は

$$\|\rho g\|_{L_t^{\frac{(d+1)\sigma}{d}, \frac{(d+1)\sigma}{(d+1)\sigma-1}} L_x^{\frac{(d+1)\sigma}{(d+1)\sigma-2}}} \lesssim \|g\|_{L_{x,v}^{\frac{(d+1)\sigma}{(d+1)\sigma-1}}} \tag{2}$$

と書き換えられる．$\mathcal{U} : \mathrm{Map}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ を $\mathcal{U}f(x,v,t) = f(x - tv, v)$ と定める．この U により，(2) は

$$\|\mathcal{U}g\|_{L_t^{\frac{(d+1)\sigma}{d}, \frac{(d+1)\sigma}{(d+1)\sigma-1}} L_x^{\frac{(d+1)\sigma}{(d+1)\sigma-2}} L_v^1} \lesssim \|g\|_{L_{x,v}^{\frac{(d+1)\sigma}{(d+1)\sigma-1}}} \tag{3}$$

と表すことができる．

$$\mathcal{U}[|f|^\lambda](x,v,t) = |f(x-tv,v)|^\lambda = (\mathcal{U}[|f|](x,v,t))^\lambda \quad (\lambda > 0)$$

となるので，

$$\|\mathcal{U}g\|_{L_t^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{d},2} L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}}} \lesssim \|g\|_{L_{x,v}^2} \tag{4}$$

を示せればよい．$\mathcal{U}$ は有界と仮定されているので，いわゆる TT^* 論法によって，

$$\|\mathcal{U}\mathcal{U}^*F\|_{L_t^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{d},2} L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}}} \lesssim \|F\|_{L_t^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{2(d+1)\sigma-d-2},2} L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}}} \tag{5}$$

に帰着される．ここで，

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^*F(x,v,t) = \mathcal{U}^*F(x-tv,v) = \int_{\mathbb{R}} F(x - tv + sv, v, s)\, ds$$

であるから，(5) を示すべく x, v のノルムを取って

$$\|\mathcal{U}\mathcal{U}^* F(\cdot,\cdot,t)\|_{L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}}} \leq \int_{\mathbb{R}} \|F(x-tv+sv,v,s)\|_{L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}}}\, ds$$

が得られる．

$$\begin{aligned}
&\|F(x-tv+sv,v,s)\|_{L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}}} \\
&\leq |t-s|^{-d\left(\frac{(d+1)\sigma}{(d+1)\sigma-1}-1\right)} \|F(\cdot,\cdot,s)\|_{L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}}} \\
&= |t-s|^{-1+\frac{(d+1)(\sigma+1)}{(d+1)\sigma-1}} \|F(\cdot,\cdot,s)\|_{L_x^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma}} L_v^{\frac{2(d+1)\sigma-2}{(d+1)\sigma-2}}}
\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\frac{d}{(2(d+1)\sigma-2} = \frac{2(d+1)\sigma-2-d}{2(d+1)\sigma-2} - \frac{(d+1)(\sigma+1)}{(d+1)\sigma-1}$$

であるから，1 次元分数べき積分作用素の有界性

$$I_\alpha : L^{P,2} \to L^{Q,2}, \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{P} - \alpha,\ 1 < P, Q < \infty$$

の有界性を用いて定理の証明が終わる．

6　追記

$P_1 < P < P_2$, $Q_1 < Q < Q_2$ が

$$\frac{1}{Q_1} = \frac{1}{P_1} - \alpha,\ 1 < P_1, Q_1 < \infty, \quad \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{P_2} - \alpha,\ 1 < P_2, Q_2 < \infty$$

を満たしているとする．

$$I_\alpha : L^{P_1} \to L^{Q_1}, \quad I_\alpha : L^{P_2} \to L^{Q_2}$$

および

$$[L^{P_1}, L^{P_2}]_{\theta,2} = L^{P,2}, \quad [L^{Q_1}, L^{Q_2}]_{\theta,2} = L^{Q,2}$$

であるから，

$$I_\alpha : L^{P,2} \to L^{Q,2}, \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{P} - \alpha,\ 1 < P, Q < \infty$$

が得られる．この論法でいろいろな不等式を得ることができる．Brascamp-Lieb 不等式も同じ発想で得ている．なお，ここで出てきたローレンツ指数が最良であることも例によって示されている．文献 On the sharpness of Lorentz space refinements of the Brascamp-Lieb inequality を参照のこと．