# Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations

高田　了（九州大学 大学院数理学研究院）

3 次元全空間において，安定成層の仮定の下で静水圧平衡からの熱対流の運動を記述する Boussinesq 方程式の初期値問題を考察する．

$$\begin{cases} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v = \Delta v - \nabla p + \theta e_3 & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \partial_t \theta + (v\cdot\nabla)\theta = \Delta\theta - N^2 v_3 & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ \nabla\cdot v = 0, & t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ v(0,x) = v_0(x), \quad \theta(0,x)=\theta_0(x) & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$v=(v_1(t,x),v_2(t,x),v_3(t,x))^T$, $p=p(t,x)$, $\theta=\theta(t,x)$ はそれぞれ流体の速度場，圧力および温度擾乱を表す未知関数であり，$v_0=(v_{0,1}(x),v_{0,2}(x),v_{0,3}(x))^T$, $\theta_0=\theta_0(x)$ はそれぞれ与えられた初期速度場および初期温度擾乱である．$N>0$ は流体の浮力周波数に対応した定数であり，鉛直軸 $e_3=(0,0,1)^T$ 方向への安定成層の強さを表す（Brunt-Väisälä 周波数と呼ばれる）．

本講演では，安定成層による歪対称な低階項 $(\theta e_3,\,-N^2v_3)^T$ が有する分散性の解析，およびその初期値問題への応用を考察する．特に，方程式系 (1) の時間大域的適切性を保証する初期温度擾乱 $\theta_0$ のノルムが，浮力周波数 $N$ に比例して大きく取れることを証明する．

未知関数を $u=(v,\,\theta/N)^T$ とし，Helmholtz 射影作用素 $\mathbb{P}$ および安定成層による低階項に対応した歪対称定数行列 $J$ を次で定義する：

$$\mathbb{P} := \left(\begin{array}{c|c} (\delta_{jk}+R_jR_k)_{1\leqslant j,k\leqslant 3} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad J := \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

また $\widetilde{\nabla}=(\nabla,\,0)^T$ とする．このとき，Helmholtz 射影作用素 $\mathbb{P}$ を作用させることで，方程式系 (1) は次の形に書き換えられる：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + N\mathbb{P}J\mathbb{P}u + \mathbb{P}(u\cdot\widetilde{\nabla})u = 0, \quad \widetilde{\nabla}\cdot u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

方程式系 (2) における線形作用素を $L_N := -\Delta + N\mathbb{P}J\mathbb{P}$ とする．このとき，歪対称な低階項 $-\mathbb{P}J\mathbb{P}$ の固有周波数が，

$$\sigma\left[-\widehat{\mathbb{P}J\mathbb{P}}\right] = \left\{\pm i\frac{|\xi_h|}{|\xi|},\,0,\,0\right\}, \qquad \xi_h=(\xi_1,\xi_2)^T$$

となることから，線形作用素 $-L_N$ によって生成される半群は以下の表現をもつ：

$$e^{-tL_N}u_0 = e^{t\Delta}e^{iNtp(D)}P_+u_0 + e^{t\Delta}e^{-iNtp(D)}P_-u_0 + e^{t\Delta}P_0u_0.$$

ここで，$P_\pm$, $P_0$ はそれぞれ固有周波数 $\pm i|\xi_h|/|\xi|$, $0$ に対応した固有射影作用素であり，$e^{\pm iNtp(D)}$ は次で定義される Fourier 乗法作用素である：

$$e^{\pm iNtp(D)}f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi\pm iNtp(\xi)}\widehat{f}(\xi)\,d\xi, \qquad p(\xi)=\frac{|\xi_h|}{|\xi|}.$$

まずは $e^{\pm iNtp(D)}$ に対する時間減衰評価を考察する．相関数 $p(\xi)=|\xi_h|/|\xi|$ が斉次 0 次であることから，Littlewood-Paley 分解とスケール変換により，問題は周波数を局在化した以下の作用素の減衰評価に帰着される．

$$U_\pm(t)f(x)=\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi\pm itp(\xi)}\psi(\xi)\widehat{f}(\xi)\,d\xi,\qquad (t,x)\in\mathbb{R}^{1+3}.$$

ここで，$\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ は $\operatorname{supp}\psi\subset\{2^{-2}\leqslant|\xi|\leqslant 2^2\}$ かつ $\{2^{-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2\}$ 上で $\psi(\xi)=1$ を満たすカットオフ関数とする．$U_\pm(t)$ に対して以下の評価が成立する．

**定理 1.** ある正定数 $C=C(\psi)$ が存在して，

$$\|U_\pm(t)f\|_{L^\infty}\leqslant C(1+|t|)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^1}$$

が全ての $t\in\mathbb{R}$ と $f\in L^1(\mathbb{R}^3)$ に対して成立する．また減衰率 $-1/2$ は最良である．

次に，定理 1 の初期値問題への応用を考察する．歪対称行列 $-\widehat{\mathbb{P}J\mathbb{P}}$ に関する固有射影 $P_\pm$, $P_0$ を用いて，非圧縮性条件 $\widetilde{\nabla}\cdot u_0=0$ を満たす初期値 $u_0$ を以下のように分解する：

$$u_0=\mathbb{P}u_0=P_+u_0+P_-u_0+P_0u_0.$$

このとき，方程式系 (2) の時間大域的適切性に関して以下が成立する．

**定理 2.** $1/2<s\leqslant 5/8$ とする．このとき，ある正定数 $\delta_1=\delta_1(s)$, $\delta_2$ が存在して，

$$\|P_+u_0\|_{\dot{H}^s}+\|P_-u_0\|_{\dot{H}^s}\leqslant\delta_1 N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})},\quad \|P_0u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\leqslant\delta_2 \tag{3}$$

を満たす任意の $u_0\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)\cap\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ と $N>0$ に対して，方程式系 (2) の時間大域解 $u\in L^4(0,\infty;\dot{W}^{\frac{1}{2},3}(\mathbb{R}^3))$ が一意に存在する．

**注意 3.** 定理 2 における条件 (3) を元の初期値 $(v_0,\theta_0)^T$ に関して書き換えると以下のようになる：

$$\left\|(-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\partial_{x_j}\partial_{x_3}v_{0,j}\right\|_{\dot{H}^s}\leqslant\delta_1' N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}\qquad (j=1,2),$$
$$\left\|(-\Delta_h)^{\frac{1}{2}}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}v_{0,3}\right\|_{\dot{H}^s}\leqslant\delta_1' N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})},\quad \|\theta_0\|_{\dot{H}^s}\leqslant\delta_1' N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})+1},$$
$$\left\|(-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_{x_1}v_{0,2}-\partial_{x_2}v_{0,1}\right)\right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\leqslant\delta_2.$$

従って，安定成層 $N>0$ の強さに比例して，時間大域的適切性を保証する初期温度擾乱 $\theta_0$ のノルムが大きく取れることが分かる．

回転流体での研究 [1] との違いとして，相関数 $p(\xi)=|\xi_h|/|\xi|$ が $\{2^{-2}\leqslant|\xi|\leqslant 2^2\}$ 上で微分可能でないため，$U_\pm(t)$ の時間減衰評価の証明において Littman の補題 [2] を直接適用出来ないことが挙げられる（回転流体の場合，相関数は $\xi_3/|\xi|\in C^\infty(\{2^{-2}\leqslant|\xi|\leqslant 2^2\})$ となる）．本研究では，相関数 $p(\xi)=|\xi_h|/|\xi|$ を適切に近似し，停留位相法の小さな摂動に対する安定性を用いることで定理 1 を証明する．

本研究は Sanghyuk Lee 氏（Seoul National University）との共同研究に基づく．

## 参考文献

[1] Y. Koh, S. Lee, and R. Takada, *Dispersive estimates for the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Adv. Differential Equations **19** (2014), 857–878.

[2] W. Littman, *Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 766–770.