Some blow-up mechanisms driven by Dirac delta approximation of nonlinear term in semilinear parabolic equations

関　行宏　(九州大学)*

$p > 1$ を定数とし, べき乗型非線形項を持つ半線形熱方程式

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad x \in \mathbf{R}^N,\, t > 0 \tag{1}$$

に対する解の爆発について考察する. (1) の解 $u(x,t)$ が $t = T < +\infty$ で爆発するとは

$$\limsup_{t\to T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = +\infty \tag{2}$$

となることを意味する. また, 正定数 M が存在して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \le M(T-t)^{-1/(p-1)}, \quad 0 < t < T \tag{3}$$

となるとき type I 爆発, そうでないとき type II 爆発という. type I 爆発解は任意の N と $p > 1$ に対して存在することを注意しておく. 以下,

$$\beta = \frac{1}{p-1}, \quad \gamma = \frac{N-2-\sqrt{16\beta^2 - 8(N-4)\beta + (N-2)(N-10)}}{2}, \tag{4}$$

$$\lambda_\ell = \ell - \frac{\gamma}{2} + \beta \quad (n = 0, 1, ...) \tag{5}$$

とおく. $N \ge 11$, $p > p_{\rm JL}$ のとき, $\lambda_\ell > 0$ となる任意の $\ell \in \mathbf{N}$ に対して

$$C_1\,(T-t)^{-\beta-2\beta\omega_\ell} \le \|u_{\ell,\rm HV}(\cdot,t)\|_\infty \le C_2\,(T-t)^{-\beta-2\beta\omega_\ell} \qquad (t < T), \tag{6}$$

$$\omega_\ell := \frac{\lambda_\ell}{\gamma - 2\beta}, \tag{7}$$

を満たす球対称な爆発解が存在する [5]. ここで, C_1, C_2 はある正定数で,

$$p_{\rm JL} := \begin{cases} +\infty, & N \le 10, \\ 1 + \dfrac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}}, & N \ge 11 \end{cases} \tag{8}$$

は Joseph–Lundgren の臨界指数と呼ばれている. $N \ge 11$, $p > p_{\rm JL}$ のとき,

$$n - \frac{\gamma}{2} + \beta \ne 0, \qquad \forall n \in \mathbf{N} \tag{9}$$

という条件の下で, 満たす任意の球対称爆発解の blow-up rate は (3) または $\{u_{\ell,\rm HV}\}_\ell$ のいずれかに一致する [1,4]. 逆に $p < p_{\rm JL}$ なら, 初期値に対する僅かな仮定の下で球対称解の爆発は必ず type I である [2,3].

* 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: `seki@math.kyushu-u.ac.jp`

$p=p_{\mathrm{JL}}$ のとき $\gamma=(N-2)/2$ で, $U(0)=1$ を満たす (1) の有界な定常解 $U_1(|x|)$ は

$$U_1(r)=U_\infty(r)-h_1r^{-\gamma}\log r+h_2r^{-\gamma}+o(r^{-\gamma})\quad (r\to\infty) \tag{10}$$

を満たすことが知られている. ここで, h_1,h_2 はある定数であり,

$$U_\infty(r)=c_*r^{-2\beta},\quad c_*=\{2\beta\,(N-2-2\beta)\}^\beta \tag{11}$$

は (1) の特異定常解である. $p>p_{\mathrm{JL}}$ のときと異なり, (9) で対数補正が現れている.

定理 1. $N\geq 11$, $p=p_{\mathrm{JL}}$, $T>0$ とし, ある番号 ℓ に対して

$$\lambda_\ell:=\ell-\frac{\gamma}{2}+\beta>0,$$

とする. このとき, T を爆発時刻とし, 以下を満たす (1) の球対称な爆発解 u_ℓ が存在する:

$$\|u_\ell(\cdot,t)\|_\infty=L\,(T-t)^{-\beta-2\beta\omega_\ell}\,|\log(T-t)|^{2\beta\eta/(\gamma-2\beta)}\,(1+o\,(1))\ \ (t\nearrow T). \tag{12}$$

ここで, $\omega_\ell=\frac{\lambda_\ell}{\gamma-2\beta}>0$, $\eta=1+\frac{1}{2\omega_\ell}$.

定理 2. $N\geq 11$, $p=p_{\mathrm{JL}}$, $T>0$ とし, ある番号 n_0 に対して $\lambda_{n_0}=0$ であるとする. このとき, $T>0$ を爆発時刻とし, 以下を満たす (1) の球対称な爆発解 u_{n_0} が存在する:

N と n_0 にのみ依存する正定数 K が存在して,

$$\|u_{n_0}(\cdot,t)\|_\infty=K\,(T-t)^{-\beta}\exp\left(2\beta\sqrt{\frac{|\log(T-t)|}{2n_0}}\right)(1+o(1))\quad (t\nearrow T). \tag{13}$$

証明にはよく用いられる後方自己相似変数を用いて方程式を書き換えた後, 特異定常解 (10) の周りで線形化するが, それでも非線形項の影響は完全には無視できない. 本講演では非線形項が常微分方程式の理論で使われるような 2 次近似ではなく **Dirac デルタによる近似**が本質的な爆発解の挙動を決定することを強調したい. これは解の原点への強い凝集の現れとみることができる.

参考文献

[1] H. Matano, *Blow-up in nonlinear heat equations with supercritical power nonlinearity*, Contemp. Math., vol. 446, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 385–412.

[2] H. Matano and F. Merle, *Classification of type I and type II behaviors for a supercritical nonlinear heat equation*, J. Funct. Anal. **256** (2009), 992–1064.

[3] N. Mizoguchi, *Nonexistence of type II blow-up solution for a semilinear heat equation*, J. Differential Equations **250** (2011), 26–32.

[4] ———, *Blow-up rate of type II and the braid group theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 1419–1443.

[5] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), 141–145.

[6] ———, *A blow up result for semilinear heat equations in the supercritical case*, unpublished preprint.